高等院校教材

应用数学的现代基础

全治明　罗建书　编著

国防科技大学出版社

应用数学的现代基础

金治明　罗建书　编著





国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学的现代基础/金治明，罗建书-长沙：国防科技大学出版社，1998.8

ISBN 7-81024-486-8

Ⅰ应用数学的现代基础

Ⅱ金治明　罗建书

Ⅲ①应用数学②教材

Ⅳ O29

国防科技大学出版社发行

电话：（0731）4555681　邮编：410073

E-mail：gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑：何　晋　　责任校对：黄八一

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168　1/32　印张：8.5　字数：213千

1998年8月第1版第1次印刷　印数：1-3000册

*

定价：12.00元

内 容 简 介

现代数学的基础是代数学、拓扑学与泛函分析。我们在第一章介绍一点必不可少的代数知识；第二章介绍实数空间上的拓扑；第三章介绍测度与积分理论；第四章介绍各种形式的黎曼积分与一致收敛性，其中包括广义积分、含参变量积分等；第五章泛函分析初步；第六章富氏积分与广义函数，它是应用数学重要的工具。

本书是工科数学教学改革的试用教材，可作为高等工科院校学生的选修课教材，也可作为工科研究生、工程技术人员的参考书。

序 言

当今数学的非凡之处是，她对科学和工程技术的所有领域都做出了令人瞩目的贡献。

数学是一门科学，她集系统性、严密性、逻辑性、精确性、创新性和想象力于一体。她在探索中前进，在前进中探索，从而日臻完美。数学以其自身强大的生命力和魅力，渗透到人类生活和科学技术的各个领域，并成为人类文明和进步的基础。

数学是一种文化，她高度专业性的语言，追求完美和创新的思想，形形色色的工具和严密的思维方式，不仅适应自身发展的需要，而且已被有效地用于阐述和回答各种科学问题。科学技术发展史表明，数学不仅是推动科学技术进步的重要因素，而且也是当今以微电子技术、计算机技术、网络与通信技术为核心的信息时代取得突出成就的重要因素。欧几里得几何、麦克斯威方程、爱因斯坦相对论，处处可见经典数学的踪迹与力量。当今个人计算机及其广泛应用、并行计算机及并行算法、计算机网络、多媒体数据的通信与保密、数字图像的压缩与还原、生命科学的细胞分裂、DNA 双螺旋研究等等，都散发着近代数学的浓郁气息。数学从来没有像今天这样充满青春活力，并广泛应用于人类生活的各个领域。

数学教育在高等教育中占有重要的地位，数学教学改革是理工科大学教学改革的重中之重。公共数学课程不仅要为学生打下坚实的基础和为学生专业课学习提供必要的数学工具，而且也是培养高素质人才具有严密的逻辑思维能力、创新能力的重要举措。

20 世纪中叶形成的我国理工科数学课程体系，由于内容、篇幅等多方面的原因，已不适应高等教育和科学技术发展的需要。主要问题是重经典轻现代、重解析轻计算、重连续轻离散，内容过多、课时过长等等。为了深化数学教学改革，积极投身国家教委组织的“面向 21 世纪改革教学内容和课程体系计划”，国防科技大学金治明教授、罗建书教授在理工科大学数学教学方面作了积极的探索和尝试。他们以工科高等数学和线性代数为基础，以较小的篇幅介绍了现代数学的三个基础学科——代数、拓扑和泛函分析。本书的出版，为非数学专业的理工科大学生尽快了解现代数学的基本概念、理论和方法，创造了有利条件。

我衷心地祝愿数学教学改革取得更大的成就。

齐治昌

1998 年 3 月于长沙

编 者 的 话

数学教学在高等教育中占据非常重要的位置，数学不只是作为工具为各学科提供描绘由量的规定性所揭示的物质运动的规律，更重要的是贯穿其中的高度抽象的方法、严密的逻辑推理是任何一门学科所必须具备的。

人类理性探索的一个永恒的主题是："认识宇宙，也认识人类自己。"在这个探索中数学起着特别的作用，它是现代科学技术的语言和工具。数学，它不断追求最简单的、最深层次的超出人类感官所及的宇宙的根本。现代数学的应用不再局限在自然科学的范畴，数学在社会科学和社会经济中的应用也日显重要，以随机分析为基础的金融数学成为现代金融分析的主要工具。中国数学会前理事长齐民友先生曾指出："一种没有发达数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为文化的民族也是注定要衰落的。"

然而，数学的发展已经使它本身成为一个大海，作为工科的本科生在掌握了一点高等数学之后应该再学一些什么呢？如果在继续训练技巧与深入到现代数学的基础二者之间一定要作一选择的话，我们宁可选择后者。这就是本门课程的指导思想，但这丝毫也不表示练习的不重要，因为只有通过练习才能深入掌握所学的知识，才能培养解决问题的能力。

人们公认现代数学的基础是代数学、拓扑学与泛函分析。我们在第一章介绍一点必不可少的代数知识；第二章介绍实数空间上的拓扑；第三章介绍测度与积分理论；第四章介绍各种形式的黎曼积分与一致收敛性，其中包括广义积分、含参变量积分等；第五章泛函分析；第六章富氏积分与广义函数，它是应用数学重要

的工具。

前四章由金治明执笔，后两章由罗建书执笔，敖武峰副教授审读了部分内容，并为第一、二章配备了习题，西北工业大学张肇帜教授和华南理工大学汪国强教授审读了全书，并提出了宝贵的修改意见，国防科技大学出版社总编谷建湘副教授作了仔细审校。在此表示衷心的感谢。

本书的出版是教学改革的初步尝试，缺点、错误在所难免，希望广大读者与同行批评指正。

金治明　罗建书

1998 年 4 月于长沙

目　录

第一章　代数结构

数学最基本的研究对象是数，这些数之间有加、减、乘、除等代数运算，但今后我们将看到一些不是数的对象也可以定义类似的运算。于是这些对象与数之间有某种类似。数学是高度抽象的科学，它把这二者在某种一一对应的意义下"等同"起来，并称之为"代数同构"。这样，我们就可以把所研究的对象按其是否"代数同构"而归为一类。

§1.1　集合及其运算

把我们所要研究的某种确定的对象放在一起就构成**集合**，集合是不能再进一步定义的概念。构成集合的对象称为集合的**元素**。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素。这里我们引入记号 $\in$ 表示"属于"，比如 $a\in A$ 表示"a 是 A 的元素"，而 $a\notin A$ 表示"a 不是 A 的元素"。表示集合的方法通常有两种，一种是外延法，也就是将集合的所有元素都列举出来，如

$$A=\{0,1,3\}$$

它表示集合 A 由 0,1,3 三个元素组成。但有时这样做很不方便，比如考虑所有自然数的集合 $\mathbf{N}$，而 $\mathbf{N}$ 中元素是列举不尽的。于是我们采用概括法来表示它，即记

$$\mathbf{N}=\{x\mid P(x)\}$$

其中 $P(x)$表示"x 具有某种性质 P",例如 $P(x)$为"x 是自然数"。又如

$$S=\{y|x \text{ 为自然数,且 } 18\leqslant x\leqslant 24, y=x^3\}$$

即 $S=\{5832,6759,8000,9261,10648,12167,13824\}$. 虽然 S 是可以用外延法表达的,但用概括法使人更明白集合 S 中元素的性质。一个很特殊的集合是空集$\varnothing$,它表示其中没有元素,用概括法可写为

$$\varnothing=\{x|x\neq x\}$$

其实这里 $P(x)$可以是任意一个不成立的命题,比如"$x\neq x, x=x+1$"等。

元素与集合是两个不同层次的概念,如用 x 表示元素,则$\{x\}$表示由单个元素 x 所组成的集合,我们有 $x\in\{x\}$. 但是,不允许写 $x\in x$,同样不允许写 $x\notin x$. 事实上,如果允许这样写,令 $T=\{x|x\notin x\}$,,那么 $T\in T$,或者 $T\notin T$ 都将导致矛盾。

设 A,B 为两个集合,$A\subseteq B$ 表示"A **含于** B",或"B **包含** A",也就是凡 A 的元素都是 B 的元素,此时也称 A 为 B **的子集合**。用数理逻辑的记号我们写为:$\forall\ x\in A\Rightarrow x\in B$,其中$\forall$ 表示"对任意一个",$\Rightarrow$表示"蕴含着"或"推出"。如果 $A\subseteq B$,但存在元素 b 属于 B 而不属于 A,则称 A **真含于** B,或 B **真包含** A,并记为"$A\subset B$,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则称 A **等于** B,并写"$A=B$". 读者要注意$\in$与$\subseteq$的区别,前者是元素与集合的关系,后者是两个集合的关系。

设 A,B 为两个集合,我们可以定义它们的运算:

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

读作 A **与** B **的并**,其中$\vee$表示"或",

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

读作 A **与** B **的交**,其中"$\wedge$"表示"并且",$A\cap B$ 也简记为 AB.

$$A\backslash B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

读作 A **差** B. 显然如果 $A\subseteq B$,则 $A\backslash B=\varnothing$. 当 $B\subset A$ 时,$A\backslash B\neq\varnothing$,

此时称它为**真差**。

如果我们所考虑的对象都在集合 X 内，也就是我们所要讨论的集合都是 X 的子集合，则称 X 为**空间**。设 $A\subseteq X$，称真差 $X\backslash A$ 为 A 的**余集**，并记为 A^C.

定理 1.1 设有空间 X,A,B,C 为集合，则有下面的运算法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

(4) 德·摩根律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$；

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C;$$

证明 举第一个分配律的证明为例，我们只要证明等式两边的集合互相包含。设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$，或者 $x\in B$ 且 $x\in C$，当 $x\in A$，则显然 x 属于等式右边的集合；而当 $x\in B$ 且 $x\in C$，则 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in(A\cup C)$，因此

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

反之，设 x 属于等式右边的集合，则 x 属于 A 或属于 B，同时 x 属于 A 或属于 C，这样 x 属于 A 或者 x 同时属于 B，属于 C，于是 x 属于等式左边的集合。类似可以证明其它几个运算法则。 □

集合的关系及其运算法则可用下面的图 1—1 表示。

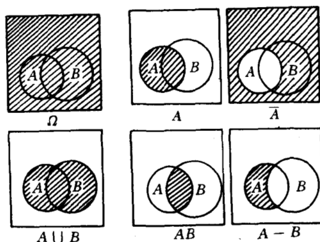


图 1-1

§ 1.2 关系与映射

设 A,B 是两个集合，我们称集合

$$A \times B = \{<x,y> | x \in A, y \in B\} \qquad (1-1)$$

为集合 A 与 B 的**笛卡尔乘积**。其中$<x,y>$称为**有序对**，也就是说$<x,y>$与$<y,x>$是不同的。

定义 1.1 称 $A\times B$ 的子集合 R 为集合 A,B 上的一个关系。

如果 A,B 都是实数集 $\mathbf{R}$，可以分别用 x-轴，y-轴来表示，则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就表示坐标平面。平面上任意一个集合都是一个关系。通过原点画一条斜率为 1 的直线，这条直线就表示 $x=y$ 的关系，而这条直线的右下方恰好表示 $x<y$ 的关系。以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆当然是坐标平面上的点集，它表示的是关系：

$$R = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

对于一个关系 R，称

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists\ y \text{ 使得 } \langle x,y \rangle \in R\}$$

为关系 R 的定义域，而称

$$\mathrm{rng}(R) = \{x \mid \exists\ x \text{ 使得 } \langle x,y \rangle \in R\}$$

为关系 R 的值域。

关系是一个集合似乎很不好理解，其实我们把关系与具有这种关系的有序对看成同一，这样就不难理解关系就是一个集合。为了方便，我们常用 $a \sim_R b$ 表示 a 与 b 具有关系 R，这样

$$R = \{\langle x,y \rangle \in A \times B \mid x \sim_R y\}$$

一般说来，$x \sim_R y$，并不一定有 $y \sim_R x$，这就是说关系不一定有对称性。数集上的“$>$”关系，人群中的“父子”关系都没有对称性，这也就是我们引入有序对，把 $\langle x,y \rangle$ 与 $\langle y,x \rangle$ 视为不同一的理由。等价关系是一种重要的关系。

定义 1.2 设 $R \subseteq A \times A$，如果关系 R 具有如下的性质，则称它为**等价关系**：

(1) 自反性，即 $x \sim_R x$ 也即 $\langle x,x \rangle \in R$；

(2) 对称性，即若 $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$，也即 $\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$；

(3) 传递性，即 $x \sim_R y$ 且 $y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$，也即 $\langle x,y \rangle \in R$，且 $\langle y,z \rangle \in R$，则必 $\langle x,z \rangle \in R$.

由(1)看出，等价关系是一个非空的集合，也即它必包含所有“对角线”的元素：$R \supseteq \{\langle x,x \rangle \mid x \in A\}$.

如果 R 是两个实数集上的相等关系“=”，即 $R = \{\langle x,y \rangle \mid x = y\}$，显然它是一个等价关系。设 X 为空间，称 $\mathscr{P}(X) = \{E \mid E \subseteq X\}$ 为 X 的**幂集**，也就是 X 的全体子集。设 R 为集合的相等关系，即

$$R = \{\langle E,F \rangle \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \mid E = F\}$$

则 R 是等价关系。显然，数集上的“$>$”或“$<$”关系不具有自反性

与对称性，因此不是等价关系，同样幂集上的包含关系也不是等价关系。撇开集合的具体内容，设 R 为集合 A 上的等价关系，称

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim_R x\}$$

为元素 x 的 R 等价类(简称为等价类)。对任意的 $z\in A$，或者 $z\in[x]$，或者 $z\notin[x]$. 当 $z\notin[x]$时，等价类$[z]$必与$[x]$不相交。事实上，如果有 $a\in[x]\cap[z]$，则 $x\sim_R a$ 且 $a\sim_R z$，由传递性，x 与 z 等价，从而 $z\in[x]$，矛盾。由此可见，集合 A 被分成为两两不相交的等价类，而且 A 就是这些等价类的并。举一个例子，设 $\mathbf{N}$ 为自然数的集合，对 $m,n\in\mathbf{N}$，引入等价关系 R 如下：$m\sim_R n$ 当且仅当 $m-n$ 能被 3 除尽。容易验证$\sim_R$ 是一个等价关系，并且我们有三个等价类：$[0]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k,k\in\mathbf{N}\}$，$[1]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$[2]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k+2,k\in\mathbf{N}\}$，而且 $\mathbf{N}=[0]\cup[1]\cup[2]$.

序是另一种重要的关系。设 X 为一个集合，$X\times X$ 上的具有传递性的关系“$\prec$称之为**序**”，亦即如 $x,y,z\in X$，$x\prec y$ 且 $y\prec z$，则 $x\prec z$. 这里“$\prec$”并不一定表示通常的“小于”。实数集上通常的“小于”关系“$<$”就是一个序；集合论中定义在 $\mathscr{P}(X)$上的包含关系“$\subseteq$”也是一个序。

如果在 X 上定义了序“$\prec$”，则称$(X,\prec)$或 X 为**偏序集**，如果它还满足

(1)若 $x\prec y$ 且 $y\prec x$，则 $x=y$；

(2)对于 X 中任意两个不同的元素 x,y，总有 $x\prec y$ 或 $y\prec x$

则称$\prec$为一个**全序**，称$(X,\prec)$或 X 是一个**全序集**。实数集按通常的“小于”构成全序集，而$(\mathscr{P}(X),\subseteq)$只是一个偏序集。

设$(X,\prec)$是一个偏序集，A 为其子集，如果对于 A 中每个元 y，都有 $y\prec x$ 或 $y=x$，则称 x 为 A 的**上界**。如果 x 为 A 的上界，而且小于或等于 A 的其它上界，则称 x 为 A 的上确界，类似地可定义 A 的下界，下确界，称集合 X 是**序完备的**，如果 X 的每个具有上界的非空子集都有上确界。

定理 1.2 集合 X 对于序 $<$ 是序完备的充要条件是每个有下界的非空子集都有下确界。

证明 假设 X 序完备，A 是一个有下界的非空子集，令 B 为 A 的所有下界所组成的集合，则 B 非空，并且任意的 $a\in A$ 都是 B 的上界，由序完备性，B 有上确界 b. 于是 b 小于或等于 B 的每一个上界，所以 b 小于或等于 A 的每个元，因此 b 是 A 的下界。此外，b 是 B 的上界，即 b 大于或等于 A 的每个下界，因此 b 是 A 的最大下界，即下确界。充分性的证明是类似的。 □

定义 1.3 设 A,B 为两个集合，f 为一个对应规则，使得对于任意一个 $a\in A$，有且仅有一个 $b\in B$ 与其相应，则称 f 为定义在 A 而取值于 B 的**映射**或**函数**，并写为

$$f:A\to B$$

称 A 为 f 的**定义域**，记为 $\mathrm{dom}(f)$，称 $f(a)$ 为 a 的**像**，a 为 $f(a)$ 的**原像**。像的全体是 B 的子集，称为 f 的**值域**，记为 $\mathrm{rng}(f)$. 如果 $B=\mathrm{rng}(f)$，亦即 $\forall\ y\in B$，$\exists\ x\in A$，使得 $f(x)=y$，则称 $f:A\to B$ 为**映上的**或**满射**；如果 $\mathrm{rng}(f)\subseteq B$，则称为**映内的**。

今后，对 A 的任意子集 E，我们记

$$f(E)=\{f(x)\mid x\in E\}$$

并称它为集合 E 的像集。注意，这里集合 A,B 并不一定是数集，所以称 f 为函数，还不如称它为映射。我们看到映射 f 与有序对 $<a,f(a)>$ 的全体，也即映射的图可以视为同一，因此映射 f 也是关系，它也是 $A\times B$ 的子集。但根据映射的定义可知，如 $<a,b>\in f$，$<a,c>\in f$，则必 $b=c$. 这是映射有别于其它关系之处。

映射是可以多对一的，如果 $f(x)=f(y)$，必有 $x=y$，则称 f 是**单射**。如果 f 是单射又是满射，则称它为**双射**，或 1-1 **映射**。

设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则由 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 定义的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为是 f,g 的复合映射。

设 $f:A\to B$ 为双射，对于每一个 $b\in B$，存在唯一的 $a\in A$，使

得 $f(a)=b$，于是我们可以定义**逆映射**或**反函数** f^{-1} 如下：

$$f^{-1}(b) = a$$

于是 $f(f^{-1}(x))=x, f^{-1}(f(y))=y$.

对于 B 的任何子集 E，我们称

$$f^{-1}(E) = \{x \in A \mid f(x) \in E\}$$

为**集合 E 的逆像**。这个记号是经常用到的，它是 A 的一个子集，其中元素 x 满足条件：$f(x) \in E$. 逆像运算保持集合的运算不变，也即它满足：

(1) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$

(2) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i)$

(3) $f^{-1}(E \backslash F) = f^{-1}(E) \backslash f^{-1}(F)$

利用集合相等的定义，容易证明上述性质，这里我们只证明(1)，其余留给读者作为练习。事实上，如果 $x\in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} E_i)$，则 $f(x) \in \bigcup_{i\in I} E_i$. 也即存在 $j\in I$，使得 $f(x)\in E_j$，于是 $x\in f^{-1}(E_j)$，从而 $x\in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$. 反之，如果 $x\in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$，那么必存在某个 $j\in I$，使得 $x\in f^{-1}(E_j)$，于是 $f(x)\in (E_j)$，故 $f(x)\in \bigcup_{i\in I} E_i$. 这表明 x 属于(1)式的左边。故(1)式成立。

对 $A,B\in \mathscr{P}(X)$，定义关系 R 如下：$A\sim_R B \Leftrightarrow$ 存在双射 f 使得 $f:A\to B$，容易证明 R 是一个等价关系。

我们称两个能够互相 1-1 映射的集合是**等势的**，也说它们有相同的势，并写为

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

记

$$\mathbf{N}_n = \{m \in \mathbf{N} \mid m \leqslant n\}$$

称它为 N 的一个前节，并令

$$\overline{\overline{\mathbf{N}_n}} = n$$

此时 $\mathbf{N}_n$ 的势就是集合 $\mathbf{N}_n$ 中元素的个数，一个与 N 的某一个前节

等势的集合称为**有限集**。有限集是不能与其真子集等势的。称与 $\mathbf{N}$ 等势的集为**可列无限集**。可列无限集的势叫做阿里夫 0，记为 $\aleph_0$. 也就是它的元素可以用自然数来编号：$a_1, a_2, \cdots$，可列无限集与有限集统称为**可列集**。高等数学中的数列 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ 就是一个可列集，一个很重要的可列集就是全体有理数的集合。

有限集的基本特征是它不能与其真子集等势，而无限集的基本特征是它能够与它的一个真子集等势。设 a,b 是两个实数，集合 $(a,b)=\{x | x \in R, a<x<b\}$ 与全体实数 $\mathbf{R}$ 的势相等。这个事实似乎难以接受，但是我们可以证明如下：令

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi(x - \frac{a+b}{2})}{b-a}\right)$$

容易证明 $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ 是一个双射。所以 $\overline{\overline{(a,b)}} = \overline{\overline{\mathbf{R}}}$. $\mathbf{R}$ 的势叫做阿里夫 1，记为 $\aleph_1$. 我们可以证明 $\mathbf{R}$ 是不可列集，为此我们只须证明 $U=[0,1]$ 是不可列集。用反证法，如果 U 可列，也即 U 的元素可排成序列：$S=\{x_1, x_2, \cdots\}$，于是 U 中任一点必在序列 S 中。将 U 分成三部分：$[0,1/3]$，$[1/3,2/3]$，$[2/3,1]$，其中至少有一个不含有 x_1，记它为 U_1（如果有两个不含有 x_1，则可任取一个为 U_1），现在再将 U_1 分成三等分，取其中不含 x_2 的部分为 U_2，依次类推得到一个集合序列 $U_1, U_2, \cdots$，且 $U_{n+1} \subset U_n$，$x_n \notin U_n$. U_n 的长为 $1/3^n$，趋于 0. 因此必有点 ζ，适合

$$\zeta \in U_n, n = 1,2,\cdots$$

这样，对一切 $n \in \mathbf{N}$，$x_n \notin U_n$，又 $\zeta \in U_n$. 于是，

$$\zeta \neq x_n, n = 1,2,\cdots$$

但 ζ 是 U 中的点，这与 U 中的点必在序列 S 中矛盾。

容易证明在一个无限集中一定含有一个可列集，所以可列无限集是势最小的无限集。

§1.3 群、环、域

群、环、域都是代数结构，我们从群开始。

定义 1.4 设 G 是由某种元素组成的非空集合，如果下面的条件成立：

(1) 在 G 中可定义一种代数运算 $\circ$（或＋），称之为乘法或加法，使得对 G 中每一对元素 a,b，有 G 中的元素 $a\circ b$ 或 $a+b$ 与之对应（亦即 G 对 $\circ$（或＋）运算封闭）；

(2) 成立结合律，即对于 G 中任意元素 a,b,c 有

$$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$$

(3) 在 G 中存在元素 e，称之为单位元，使得对任意的 $a\in G$ 有

$$a\circ e=e\circ a=a$$

(4) 对 G 中每一个元素 a，存在元素 a^{-1}，称之为逆元，使得

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$$

则称 $(G,\circ)$ 为一个群，方便地也称 G 为群。

当群中的运算 $\circ$ 称之为乘法时，我们往往写 $a\circ b$ 为 ab，称为**积**，并称该群为**乘群**。当群中的运算称之为加法时，记 $a\circ b$ 为 $a+b$，称为**和**，并称该群为**加群**，同时记单位元为 0，而 a 的逆元记为 $-a$. 千万不要以为这里的乘法就是数的乘法，加法就是数的加法。

例 1-1 全体整数 **N** 对于数的加法成一个群，全体有理数 Q，全体实数 **R**，全体复数 **K**，对于数的加法都是一个群。

例 1-2 全体非零实数对于数的乘法成一个群，全体正实数对于数的乘法也成一个群。

例 1-3 平面绕着一个点的一切旋转的全体形成一个群。这个群的元素不再是数，旋转 α 角再旋转 β 角的积就是旋转 $\alpha+\beta$

角。这个群的单位元就是旋转 0 度的角，而每个旋转 α 的逆元就是旋转 $-\alpha$.

例 1-4 设 M 是一个集合，由 M 到自身的 1-1 映射的全体 S_M，按乘法

$$\forall f,g \in S_M,\ f \circ g(a) = f(g(a))$$

组成群，称为**变换群**。

变换群的单位元就是将每个元映为自身的恒等映射 I：$I(x)=x$，而对每个 $f\in S_M$，它的逆元就是逆映射 f^{-1}.

在群的定义中并不要求交换律成立，如果在群中交换律成立，即

$$a \circ b = b \circ a$$

则称这个群为**交换群**或**阿贝尔(Abel)群**。

例 1-5 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为 2 阶矩阵，其中 a_{ij} 都是数。如果行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

则称矩阵 A 是满秩的。记

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

定义两个矩阵 A 与 B 的乘法 AB 如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

则二阶矩阵全体形成一个群，这个群的单位元就是单位阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

容易验证，一般地 $AB\neq BA$，因而它不是交换群。

现在由群的定义来推导群的一些简单性质。

(1) 设G为一个群，则对任意的$a,b\in G$，方程

$$ax = b$$

与

$$ya = b$$

有解。事实上，$x=a^{-1}b$就适合第一个方程，

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$$

而$y=ba^{-1}$就适合第二个方程。

(2) 消去法成立。即由$ax=ay$，或$xa=ya$可以推出$x=y$. 事实上，用a^{-1}乘等式的两边便可证明。由此可知，(1)中两个方程的解是唯一的。

定义 1.5 如果群G的非空子集H对于群G的运算也成一个群，则称H为G的子群。

例 1-6 设n为整数，在整数加群$\mathbf{N}$中，所有n的倍数对加法也成群，因而是子群。

设G为一个群，则只有单位元e组成的子集$\{e\}$显然是G的子群，G本身也是G的子群，这两个子群称为是G的平凡子群。

定理 1.3 群G的非空子集H是子群的充要条件是：$\forall\ a,b\in H$，有$ab^{-1}\in H$

证明 必要性显然。往证充分性，因H非空，故有$a\in H$，于是

$$e = aa^{-1} \in H$$

显然e也是H的单位元。由$e,a\in H$，由条件得$a^{-1}=ea^{-1}\in H$即H中每个元有逆元；由$a,b\in H$，可知$a,b^{-1}\in H$，从而

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

即H对乘法封闭；

结合律对于G成立，因而对H也成立。所以H为G的子群。

□

定义 1.6 设G,H是两个群，如果存在一个有G到H的双

射 f，使得对任意的 $x,y\in G$ 有

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad (1-2)$$

则称 G 与 H **同构**，记为 $G\cong H$. 并称上述 f 为**同构映射**。

显然，同构把单位元变为单位元，把逆元变为逆元。事实上，设 e 为 G 的单位元，则 $ea=a$，因而 $f(e)f(a)=f(ea)=f(a)$，可见 $f(e)$ 为 H 的单位元。由 $a^{-1}a=e$，即得 $f(a^{-1})f(a)=f(e)$，因之 $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$.

同构"$\cong$"显然是群之间的一种关系，容易证明"$\cong$"具有自反性，对称性，传递性。事实上，自反性是显然的，因为由 G 到 G 的恒等映射就是一个同构映射；为证对称性，设 $f:G\to H$ 为同构映射，则 $f^{-1}:H\to G$，也是双射。对任意的 $x',y'\in H$，则存在 $x,y\in G$，使得 $x'=f(x),y'=f(y)$. 于是，

$$\begin{aligned} f^{-1}(x'y') &= f^{-1}(f(x)f(y)) = f^{-1}f(xy) \\ &= xy = f^{-1}(x')f^{-1}(y') \end{aligned}$$

这表明 f^{-1}是 H 到 G 的同构；最后证明传递性：为此设 $f:G\to H$，$g:H\to K$ 均为同构映射，则 $g\circ f:G\to K$. 对 $x,y\in G$，对，我们有

$$\begin{aligned} (g\circ f)(xy) &= g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) \\ &= (g\circ f)(x)(g\circ f)(y) \end{aligned}$$

这表明 $g\circ f$ 是 G 到 K 的同构映射。

由上述的证明可知，同构是一种等价关系，因此我们可以把群按其是否同构而分类，每一类中我们可以任取一个群作为代表，研究了它就等于研究了这一类群。

例 1-7 全体实数 $\mathbf{R}$ 按照实数的加法构成一个加法群 $\mathbf{R}$，而全体正实数按照实数的乘法构成一个乘法群 $\mathbf{R}^+$，对 $a>0,a\neq 1$，令

$$\sigma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$$

为 $\sigma(x)=a^x$，则 σ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$的一个同构，且

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)\sigma(y)$$

易知,σ 的逆映射 $\sigma^{-1}x=\ln x$.

定理 1.4 凯来(Cayley) 任何一个群都同构于一个变换群。

证明 设 G 是一个群,对每个 $a\in G$,我们定义集合 G 的变换 f_a 如下:

$$f_a(x) = ax, x \in G$$

往证每个 f_a 都是双射。事实上,由 $ax=ay$,以及群上消去律得到 $x=y$. 可见每个变换 f_a 都是单射。而对每个 $b\in G$,

$$f_a(a^{-1}b) = aa^{-1}b = b$$

故知 f_a 是满射,从而每个 f_a 是群 G 到自身的变换。令

$$G_l = \{f_a | a \in G\}$$

往证 G_l 是一个变换群。由

$$f_a f_b(x) = f_a(bx) = abx = f_{ab}(x)$$

即

$$f_a f_b = f_{ab} \qquad (1-3)$$

可见 G_l 对乘法封闭,容易验证结合律成立。而由

$$f_e f_a(x) = eax = ax = f_a(x)$$

可见 f_e 是 G_l 的单位元。再由

$$f_a f_{a^{-1}}(x) = f_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = x$$

所以,

$$f_{a^{-1}} = f_a^{-1}. \qquad (1-4)$$

可见对每个变换都存在逆元,因此 G_l 是一变换群。因为当 $f_a=f_b$ 时,有

$$a = ae = f_a(e) = f_b(e) = be = b$$

因此,映射

$$g: G \to G_l, g(a) = f_a$$

是 1-1 的,映上的,而(1-3)式表明,$g(ab)=g(a)g(b)$,因此群 G 与变换群 G_l 同构。 □

群是具有一种代数运算的代数结构，而以前我们遇到的实数，矩阵，函数类都有两种代数运算：加法与乘法（减法与除法可以由它们定义）。现在就来研究有两种代数运算的代数结构。

定义 1.7 设在非空集合 G 上定义了两种代数运算，一个叫加法，记为 $a+b$，一个叫乘法，记为 $a\circ b$，简记为 ab，它们适合：

（1） 关于加法 G 是一个交换群，其单位元记为 0，每个元 a 的逆元记为 $-a$

（2） 关于乘法有结合律：

$$a(bc)=(ab)c$$

（3） 关于加法和乘法有分配律：

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(b+c)a=ba+ca$$

这样的代数结构 $(G,+,\circ)$ 称为**环**，也称 G 为环。

例 1-8 全体整数 **Z** 对于数的加法与乘法显然是一个环，通常称为整数环。但全体自然数 **N** 对于数的加、乘法不是环。

例 1-9 设 R 是一个环，x 为一个不属于 R 的文字，所有形式为

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, a_i\in R, i=0,1,\cdots,n, n\geqslant 0$$

的式子的集合记为 $R[x]$. 在 $R[x]$ 中按通常多项式的加法，乘法定义加法与乘法，则 $R[x]$ 构成一个环，称为系数在环 R 中的多项式环。

例 1-10 全体 2 阶矩阵，按对应元素相加的加法与例 1-6 所定义的乘法也构成一个环。

设 R 是一个环，它关于加法是一个交换群，其单位元为 0，每个 $a\in G$ 的逆元为 $-a$. 设 $a,b\in G$，则

$$ab+a(-b)=a(b+(-b))=a0$$

由于 $a0+a0=a(0+0)=a0$，故 $a0=0$，从而 $ab+a(-b)=0$.

因此，ab 与 $a(-b)$ 互逆，即

$$a(-b)=-ab$$

同样可证

$$(-a)b=-ab$$

于是

$$(-a)(-b)=-(-a)b=-(-ab)=ab$$

这里最后一步是因为一个元素逆的逆就是其本身。顺便指出，这就是中学代数中负负得正的法则。

我们知道实数域中乘法不只满足结合律，还具有更多的性质。作为这一类对象的抽象，我们引入

定义 1.8 设 P 是一个至少含有两个元素的环，如果在 P 中的乘法还具有下列性质：

(1) P 中存在单位元 e，即对任意 $a\in P$ 有

$$ea=ae=a$$

(2) 对 P 中每个非零元 a，都有一逆元 a^{-1} 使

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e$$

(3) 对乘法交换律成立，即对任意 $a,b\in P$

$$ab=ba$$

那么称$(P,+,\cdot)$为域。

例 1-11 实数集连同实数的加法、乘法运算是一个域。同样有理数域，复数域等都是域。

例 1-12 恰有两个元素的域可构造如下：设 $P=\{0,1\}$，并定义

$$0+1=1+0=1,$$
$$1+1=0+0=0,$$
$$0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0,$$
$$1\cdot 1=1$$

大家知道这就是二进制的加法和乘法，则$(P,+,\cdot)$就是一个域，加法的单位元是 0，乘法的单位元是 1，对于加法，0，1 分别与自身

互逆，对于乘法，1 与其自身互逆。

域的一个特征是：∀ 域中的元素 x,y，若 $xy=0$，则必 $x=0$，或者 $y=0$. 我们称这个性质为，域中没有零因子。

例 1-13　设 $P=\{(a_n)\mid\forall\ n\in\mathbf{N},a_n\in\mathbf{R}\}$，也即 P 为实数列的全体，对于两个数列 (a_n)，(b_n) 定义：$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$，$(a_n)\cdot(b_n)=(a_nb_n)$. 容易验证 $(P,+,\cdot)$ 是一个环，且满足定义 1.8 的条件(1)与(3). 显然，P 的零元就是全部由 0 组成的序列 $(0,0,\cdots)$. 于是，$(0,1,0,1,\cdots)$ 与 $(1,0,1,0,\cdots)$ 都不是零元，但它们的乘积为零元。因此，P 中有零因子，所以 P 不是域。

定义 1.9　如果环 R 中的非空子集 R_1 对 R 中的运算也组成一个环，则称 R_1 为 R 的**子环**。如果 R 的子环 R_1 是一个域，则称 R_1 为子域。

例 1-14　在整数环 $\mathbf{Z}$ 中，全体偶数组成一个子环；在例 9 中，全体对角矩阵组成一个子环；全体形如

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

的矩阵也组成一个子环。有理数域是实数域的子域，实数域是复数域的子域。

定理 1.5　环 R 的非空子集 R_1 为子环的充要条件是：

1) 由 $a,b\in R_1$，推出 $a-b\in R_1$；

2) 由 $a,b\in R_1$，推出 $ab\in R_1$.

请读者证明之。

定义 1.10　称环 R 与环 R' 是同构的，如果存在一个 R 到 R' 的双射 f 使得

1)　$f(a+b)=f(a)+f(b)$

2)　$f(ab)=f(a)f(b)$

并称这样的映射为同构映射。

同构的环具有相同的代数性质，因此从抽象的观点看，同构的

环可以不加区别。域也是环，所谓域之间的同构就是指它们作为环的同构。

例 1-15 全体元素属于数域 P 的二阶满秩矩阵按矩阵的加法与乘法构成域，全体形如

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

的矩阵构成一个子域 $M_2(P)$，映射

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = a$$

就是由 $M_2(P)$ 到数域 P 的同构。

习题一

1. 试证：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid x \geqslant \frac{1}{n}\} = (0, +\infty)$$

2. 记 $I=[0,1]$，$A_\alpha=(\alpha-1/2,\alpha+1/2)$，$\alpha\in I$，试证：

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = (-\frac{1}{2},\frac{3}{2}),\ \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \varnothing$$

3. 证明下面的集合运算等式：

$$A\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n),$$

$$A\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A\cup B_n),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\backslash B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\backslash B)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\backslash B=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\backslash B)$$

4. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{(x-2)^2 \mid x\in A\}$，试写出 $A\times B$，$B\times$

A，及 $\mathscr{P}(A)$，$\mathscr{P}(B)$.

5. 设 Z 是整数集，对 $a,b\in Z$，$m\in\mathbf{N}$，用 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$ 表示 m 除 a 与 m 除 b 的余数相同，并称 a,b 关于模 m 同余，往证同余关系是 Z 上的等价关系。

6. 对于 $A,B\in\mathscr{P}(X)$，定义 $\mathscr{P}(X)$上的等势关系 R 如下：

$$A\sim_R B\Leftrightarrow \text{存在双射 } f:A\to B$$

试证等势是一个等价关系。

7. 试证 Z 上的整除关系是偏序关系，而不是全序关系。

8. 设 $f:X\to Y$，$A,B\subseteq X$，试证：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$；

(2) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(3) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

9. 设 $f:X\to Y$ 为映射，对 $B\in\mathscr{P}(X)$，记 $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$，$\{B_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$为 Y 中的一族集合，试证：

(1) 当 $B_\alpha\subseteq B_\beta$ 时，$f^{-1}(B_\alpha)\subseteq f^{-1}(B_\beta)$；

(2) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha)$；

(3) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha)$；

(4) $f^{-1}(B_\beta\backslash B_\alpha)=f^{-1}(B_\beta)\backslash f^{-1}(B_\alpha)$

10. 试证：若 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$ 都是双射，则 $g\circ f:A\to C$ 是双射，且

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

11. 试证全体奇数，全体偶数，全体素数，全体合数分别都是可列无限集。

12. 试证全体有理数集 Q 是可列无限集。

13. n 个元$\{1,2,\cdots,n\}$的置换是指它的一个重排$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，记为

$$\sigma(\{1,2,\cdots,n\})=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

定义两个置换 σ,δ 的积为

$$\sigma\delta(\{1,2,\cdots,n\}) = \sigma(\delta(\{1,2,\cdots,n\}))$$

试证 n 个元素的全体置换按上面定义的乘法构成一个群(称为置换群)。

14. 验证例 1-2,1-3,1-4 所举的群是否是交换群?

15. 证明任意多个子群的交还是子群。

16. 设 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$,试证:$F$ 对数的通常加法与乘法构成域。

17. 设 $G=Q\setminus\{1\}$,对 G 中的 a,b,定义运算 $\circ$ 如下:$a\circ b=a+b-ab$,验证$(G,\circ)$是一个群。

18. 试证:$Z[i]=\{a+bi\mid a,b\in Z,i=\sqrt{-1}\}$关于复数的加法与乘法构成一个环。

19. 设 $\mathbf{R}$ 为全体实数,"+"仍为数的加法,乘法定义为 $a\circ b=|a|b$,试证:$(\mathbf{R};+,\circ)$不是环。

20. 设

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in Q\right\},$$

验证 F 对矩阵的加法与乘法构成域。

第二章　分析基础

数学分析研究的对象是实数以及实函数，所以实数集及其性质是数学分析的基础。在实数集上除了有通常的代数结构外，还要赋予所谓的拓扑结构才能讨论数列或函数的收敛性。本章就来研究这个问题。

§2.1　实数域

众所周知，微积分是由牛顿(I. Newton)、莱布尼茨(G. M. Leibniz)所创立的，距今约有300多年的历史。直到19世纪才由波尔查诺(B. Bolzano)、柯西(A. Cauchy)、阿贝尔、狄里克莱(P. L. Dirichlet)、维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等人为微积分建立了较严格的体系，但此时人们对于微积分立论的基础——实数还没有给出一个严格的定义，最后终于在19世纪的后半叶，由维尔斯特拉斯，戴德金(R. Dedekind)，康托(G. Cantor)建立了实数域，才为微积分奠定了基础。戴德金与康托分别采用两种不同的方法建立实数域，这两个结构是代数同构的，都可以用下面的公理来描述。

设**R**是一个集合，如果

(1)　在集合**R**的元素间可以定义序“>”，使得它满足下面的公理1.1，1.2；

(2)　在集合**R**中可定义两种分别称之为加法“+”和乘法

“·”的运算，使得对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $x+y\in\mathbf{R}$，$x\cdot y\in\mathbf{R}$，且满足下面的公理 2.1—2.5 和 3.1—3.6；

(3) R 满足**连续性公理**。

则称 R 是一个**实数域**。

公理 1.1 $\forall x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$ 以下三种关系

$$x>y,x=y,y>x$$

有且仅有一种关系成立；

公理 1.2 若 $x>y$ 且 $y>z$，则 $x>z$；

公理 2.1 $x+y=y+x$；

公理 2.2 $(x+y)+z=x+(y+z)$；

公理 2.3 存在 R 中的一个唯一元素 0，使得对每个 $x\in\mathbf{R}$，$x+0=x$；

公理 2.4 对每个 $x\in\mathbf{R}$ 存在 $-x\in\mathbf{R}$，使得 $x+(-x)=0$；

公理 2.5 若 $x>y$，则对每个 $z\in\mathbf{R}$ 有 $x+z>y+z$；

公理 3.1 $x\cdot y=y\cdot x$；

公理 3.2 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$；

公理 3.3 存在 R 中的元素 1，且 $1\neq 0$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有 $x\cdot 1=x$；

公理 3.4 对每个 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$，都存在 R 中的元素 $1/x$，使得 $x\cdot 1/x=1$；

公理 3.5 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$；

公理 3.6 若 $x>y,z>0$，则 $x\cdot y>0$，

公理 4.0 （连续性公理）对每个 R 中的非空子集 A，若 A 在 R 中有上界，则必有上确界。

这里称 M 为实数集 A 的**上确界**是指：

(1) 对任意的 $a\in A,a\leqslant M$；

(2) $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ a'\in A$，使 $a'>M-\varepsilon$.

简明地说，一个集合的上确界就是它的最小的上界。类似地，我们

可以定义集合 B 的下确界为它的最大的下界。确切地，称 m 为 B 的**下确界**是指：

(1) 对任意的 $b\in B, b\geqslant m$；

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ b'\in B$，使 $b'<m+\varepsilon$.

连续性公理也称为序完备公理，由定理 1.2 可见它等价于："**R** 中有下界的非空子集必有下确界。"因此，实数域就是一个序完备的域。

下面我们将证明(参考定理 2.10)连续性公理等价于阿基米德公理与完备性公理，所以我们也称 **R** 为**完备的有序的阿基米德域**。

公理 5.0 (阿基米德公理)对任意的实数 $x, y>0$，必存在自然数 n，使 $nx>y$.

公理 6.0 (完备性公理)实数序列$\{x_n\}$收敛的充要条件是它为 Cauchy 基本列，亦即$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}$，使当 $n, m>N$ 时，$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

注 2.1 这里特别要指出容易被忽视的阿基米德公理，实际上实数的观念已深入我们的脑海，所以阿基米德公理被认为是理所当然的事。其实，的确存在着非阿基米德域。20 世纪 60 年代由美国数理逻辑学家 A. Robinson 创立的非标准分析的基本概念——超实数域就是一个非阿基米德域。

把比任何正实数为小的数称为是"**无穷小**"显然是合适的，这里我们把无穷小打上引号表示这个"无穷小"并不是标准的数学概念。在标准的微积分或高等数学中如此的"无穷小"不是实数。这正是下面命题的结论：

一个有序域 $\mathscr{D}$ 是非阿基米德域的充要条件是 $\mathscr{D}$ 中存在非零的"无穷小"。

事实上，如 $\omega\in\mathscr{D}$ 是非零无穷小，则$\forall\ n\in\mathbf{N}, 0<|\omega|<1/n$，此即 $n\cdot|\omega|<1$，这表明 $\mathscr{D}$ 是一个非阿基米德域。

反之，如 $\mathscr{D}$ 是一个非阿基米德域，则有 $a,b\in\mathscr{D}$，$a>0$，$b>0$，但对任意的 $n\in\mathbf{N}$，$na<b$，令 $\omega=b/a$，则 $n\omega<1$，故 ω 是一个非零无穷小。 □

现在我们的实数域是阿基米德域，因此一个非负实数比任意的正实数为小当且仅当它是零，我们再一次指出这个似乎是不言而喻的事实却是阿基米德公理的推论。

在实数集上的代数结构建立之后，我们转入拓扑结构的建立。

§2.2 实数域上的拓扑

称 $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$ 为开区间，称 $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间。

定义 2.1 设 $E\subseteq\mathbf{R}$，$x_0\in E$，如果存在开区间 (α,β) 使得

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subseteq E$$

则称 x_0 为 E 的**内点**，如果 E 的每个点都是内点，则称 E 为**开集**。

上述的 (α,β) 称为是点 x_0 的**开邻域**，因此一个集是开集当且仅当它包含该集中每个点的一个开邻域。记 $\mathscr{U}$ 为 $\mathbf{R}$ 的全体开集，则每个开区间为开集，$\mathbf{R}$ 本身是开集，空集也是开集。

定理 2.1 开集族 $\mathscr{U}$ 满足：

(1) $\varnothing\in\mathscr{U}$；$\mathbf{R}\in\mathscr{U}$；

(2) $\mathscr{U}$ 对有限交及任意并的运算封闭，亦即任意有限个开集的交是开集，任意多个开集的并仍是开集。

证明 只须证(2). 设 G_k，$k=1,2,\cdots,n$ 为 n 个开集，

$$P=\bigcap_{k=1}^{n}G_k$$

若 P 为空集，则 P 为开集。如果 P 非空，对任意的 $x_0\in P$，则 $x_0\in G_k$，$k=1,2,\cdots,n$. 对于每个 k，存在 (α_k,β_k) 使得

$$x_0 \in (\alpha_k, \beta_k) \subseteq G_k$$

置 $\lambda = \max(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$；$\mu = \min(\beta_1, \cdots, \beta_n)$，则 $x_0 \in (\lambda, \mu) \subseteq P$，这表示 x_0 为 P 的内点，因此 P 为开集。

设

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i$$

其中 I 为任意的指标集，每个 G_i 均为开集。对任意的 $x_0 \in G$，必有 $i \in I$，使 $x_0 \in G_i$，于是存在 (α, β)，使得

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq G_i \subseteq G$$

亦即 G 中每个点都是内点，所以 G 是开集。 □

一个开集称为是**有界开集**是指存在 $M > 0$，使得 $G \subseteq [-M, M]$.

定理 2.2 任何非空有界开集都是至多可列个互不相交开区间的并。

证明 设 G 为非空有界开集，则有 $M > 0$ 使 $G \subseteq [-M, M]$. 对任意的 $x \in G$，存在 (α, β)，使 $x \in (\alpha, \beta) \subseteq G$. 令

$$E_\alpha = \{y \leqslant \alpha \mid y \notin G\}$$

则 E_α 非空（如 $-M-1 \in E_\alpha$），α 为它的上界。由连续性公理，E_α 有上确界 α'. 可证 $\alpha' \notin G$. 事实上，若 $\alpha' \in G$，则存在 $\varepsilon > 0$，使 $(\alpha' - \varepsilon, \alpha' + \varepsilon) \subseteq G$，而 α' 为 E_α 的上确界，故有 E_α 的点 y 使 $\alpha' \geqslant y > \alpha' - \varepsilon$. 于是，$y \in (\alpha' - \varepsilon, \alpha' + \varepsilon) \subseteq G$，这与 E_α 的定义矛盾。所以 $\alpha' \notin G$. 由上所证可知，$(\alpha', \alpha) \subseteq G$. 事实上，如果存在 $x \in (\alpha', \alpha)$，则 $x \in E_\alpha$，这与 α' 为 E_α 的上确界矛盾。上面的证明就是将 (α, β) 向左延伸，直到一个不属于 G 的点，同样我们也可将 (α, β) 向右延伸，直到一个不属于 G 的点 β'，记 $I_x = (\alpha', \beta')$. 可以证明，对于 G 中不同的 $I_x, I_{x'}$，我们有 $I_x \cap I_{x'} = \varnothing$. 显然，数直线上这种互不相交的开区间的每一个都含有一个有理点。因此这种区间的全体与有理数集的一个子集有相同的势，所以它至多可列，于是可记为 $I_1, I_2, \cdots$ 显然有

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

又每个 $I_i \subseteq G$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq G$. 从而

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

□

注 2.2 无限个开集的交未必是开集。事实上，诸开集

$$G_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \quad n = 1, 2, \ldots$$

的交集为单点集$\{1\}$，不是开集。

注 2.3 在一般拓扑学中，设 X 为一个非空集合，如果 X 的子集族 $\mathscr{T}$ 满足：

(1) $X, \varnothing \in \mathscr{T}$，

(2) $\mathscr{T}$ 对有限交及任意并封闭，

则称集族 $\mathscr{T}$ 为**拓扑**，称 $\mathscr{T}$ 的每个成员为 $\mathscr{T}$-**开集**或简称为**开集**，并称 X 或$(X, \mathscr{T})$为**拓扑空间**。

这里 X 是一个抽象集合，它可以是实数域，即 $X = \mathbf{R}$；可以是坐标平面，即 $X = \{x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$；也可以是其它所要考虑的数学对象的全体。

照此，由定理 2.1，$(\mathbf{R}, \mathscr{U})$就是一个拓扑空间，当然在 $\mathbf{R}$ 上并不只有一种拓扑，比如令 $\mathscr{T}_{\max} = \{\mathbf{R}$ 的一切子集$\}$或令 $\mathscr{T}_{\min} = \{\varnothing, \mathbf{R}\}$，它们都是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑。为区别起见，称 $\mathscr{U}$ 为通常拓扑。

显然，如果 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{R}$ 任一个拓扑，由上面注 2.3 关于拓扑的定义，则有

$$\mathscr{T}_{\min} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\max}$$

因此完全有理由称 $\mathscr{T}_{\max}$为 $\mathbf{R}$ 上最大的拓扑，而 $\mathscr{T}_{\min}$为 $\mathbf{R}$ 上最小的拓扑。

如果 $\mathbf{R}$ 的子集 A 的余集为开集，则称 A 为**闭集**。由德·摩根律(定理 1.1 之(4))易知，任意个闭集的交必是闭集，有限个闭集

的并必是闭集。空间 **R** 本身及空集也是闭集。

根据闭集的定义，A 为闭集当且仅当 A^c 为开集，当且仅当 A^c 的每一个点都有含于 A^c 的开邻域，亦即 A^c 的每个点都有与 A 不相交的开邻域。写成命题的形式就是：

$$\forall\ x \in A^c \Rightarrow \exists\ x \text{ 的开邻域} U_x, U_x \cap A = \varnothing \quad (2-1)$$

它的等价命题便是：

$$\forall\ x \text{ 的开邻域} U_x, U_x \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A \quad (2-2)$$

这就是说，A 是闭集当且仅当对于每个 x，如果它的每个开邻域与 A 相交，则 $x \in A$.

点 x 称为是集合 A 的**极限点**或**聚点**是指 x 的每个开邻域必含有 A 中异于 x 的点，记 A 的所有极限点的集合（称为 A 的**导集**）为 A'，$x \in A'$ 可表达为：

$$\forall\ x \text{ 的邻域} U_x, (U_x \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

注意到 $U_x = (U_x \backslash \{x\}) \cup \{x\}$，于是点 x 的每个开邻域与 A 相交，等价于

$$\{x\} \cap A \neq \varnothing (\text{即 } x \in A)$$

或者

$$(U_x \backslash \{x\}) \cap A \neq \varnothing (\text{即 } x \in A')$$

因此，由(2-2)式可知，A 为闭集等价于 $A' \subseteq A$. 所以，我们有

定理 2.3　A 为闭集当且仅当 A 包含它的一切极限点。

如果 x 是集 A 的极限点，我们说 A 中含有任意接近 x 的点是很形象的。事实上，任取自然数 n，开邻域 $(x-1/n, x+1/n)$ 中都有 A 中的点。

容易证明对任意的两个集合 A, B，我们有

$$(A \cup B)' = A' \cup B'$$

事实上，"$\supseteq$"是明显的，往证反包含。如 x 属于上式左端的集合，即 x 的任意开邻域中含有 $A \cup B$ 的点，于是存在 $A \cup B$ 中的点列 $E \triangleq \{x_1, x_2, \cdots\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 如果 E 中有无限个点属于 A，则 x

$\in A'$；如果 E 中仅有有限个点属于 A，则 $x\in B'$. 总之 $x\in A'\cup B'$，故 $(A\cup B)'=A'\cup B'$. □

如果 $A=(0,1)$，则 $A'=[0,1]$；如果 $A=\{x|x$ 为非负有理数，$x^2<2\}$，则 $A'=[0,\sqrt{2}]$；如果 $A=\{1/n|n\in\mathbf{N}\}$，则 $A'=\{0\}$；如果 $A=\mathbf{N}$，则 $A'=\varnothing$.

称 $\overline{A}=A\cup A'$ 为 A 的闭包，可以证明

定理 2.4 任意集合的闭包是闭集。

证明 按照定理 2.3，我们只要证明 $\overline{A}'\subseteq\overline{A}$. 如果 x 是 $\overline{A}$ 的极限点，那么它或者是 A 的极限点，或者是 A' 的极限点。如果 x 是 A 的极限点，则 $x\in A'\subseteq\overline{A}$；如果 x 是 A' 的极限点，那么 x 的任意开邻域 U_x 中必含有 A' 的点 y。既然 $y\in A'$，所以任意包含 y 的开邻域必含有 A 的点，而 U_x 正是包含 y 的开邻域，因此 U_x 中必有 A 的点。这就证明了 $x\in A'\subseteq\overline{A}$. □

定理 2.5 任意有界闭集 F 必有最大点与最小点。

证明 由连续性公理，有界集 F 存在上确界与下确界。而由上、下确界的定义可知它们都是有界闭集 F 自身的极限点，从而属于这个有界闭集，因此它们分别是有界闭集的最大点与最小点。

现在我们用拓扑学的观点来叙述极限的概念。设有取值在实数空间上的序列 $A=\{a_n\in\mathbf{R}\,|\,n\in\mathbf{N}\}$；称序列 A 在集 E 中是指：对每个 $n\in\mathbf{N}$，$a_n\in E$. 称序列 A 以 E 为归宿是指：存在 $m\in\mathbf{N}$，使当 $n>m$ 时，$a_n\in E$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

也就是序列 A 以 a 的每个开邻域为归宿。 □

定理 2.6 设 $A\subseteq\mathbf{R}$

(1) 点 $a\in A'$ 当且仅当在 $A\backslash\{a\}$ 中存在一个收敛到 a 的序列；

(2) $a\in\overline{A}$ 当且仅当在 A 中存在一个收敛到 a 的序列；

(3) A 为闭集当且仅当在 A 中不存在收敛到 A^c 的序列。

证明 (1)点 $a\in A'$，则在它的开邻域 $I_1=(a-1,a+1)$ 中存在 $a_1\in A,a_1\neq a$，而在开邻域 $I_2=(a-|a_1-a|/2,a+|a_1-a|/2)$ 中存在 $a_2\in A,a_2\neq a$. 照此，一般地在开邻域 $I_n=(a-|a_{n-1}-a|/2,a+|a_{n-1}-a|/2)$ 中存在 $a_n\in A,a_n\neq a$. 于是我们得到 $A\backslash\{a\}$ 中的序列 $\{a_1,a_2,\cdots\}$，显然它收敛到 a. 反之，如果在 $A\backslash\{a\}$ 中存在一个序列收敛到 a，也即这个序列以 a 的每个开邻域为归宿，于是 a 的每个开邻域中都有该序列的点，即有 $A\backslash\{a\}$ 中的点，所以 a 是 A 的极限点。

(2)因 $\overline{A}=A\cup A'$，如 $a\in A'$，则由(1)可知存在着收敛到 a 的序列；如 $a\in A$，则常数列 $\{a,a,\cdots\}$ 就是一个收敛到 a 的序列。所以，对于 $\overline{A}$ 中的点，存在着一个收敛到该点的序列。反之，如果在 A 中存在一个收敛到 a 的序列，则 a 的每个开邻域必与 A 相交，从而不论 $a\in A$ 或 $a\notin A$(此时 $a\in A'\subseteq\overline{A}$)，都有 $a\in\overline{A}$.

(3)如在 A 中存在序列 $\{x_n\}$ 收敛到 A^c 中的点 ζ. 则表明 ζ 是 A 的极限点，但 $\zeta\notin A$，从而 A 不是闭集，矛盾。反之，如 A 非闭集，即 $A'\subseteq A$ 不成立。于是，存在 $\zeta\in A$，且 $\zeta\in A^c$，这表明存在 A 中的序列收敛到 A^c 的点，矛盾。

由此可见，如果 $\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$ 是闭集 A 内的一个序列，且

$$\zeta=\lim_{n\to\infty}x_n$$

则必 $\zeta\in A$. □

§2.3 紧 性

紧性是拓扑学中一个很重要的概念，它与实数域的连续性公理有着密切的联系。

设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$\mathscr{U}$ 为一个集族，$A\subseteq X$ 如果

$$A\subseteq\bigcup\{E|E\in\mathscr{U}\}$$

则称集族 $\mathscr{U}$ 覆盖了 A，或称 A 被集族 $\mathscr{U}$ 所覆盖。如果此时 $\mathscr{U}$ 是一个开集族，则称 $\mathscr{U}$ 为 A 的**开覆盖**。如果在 $\mathscr{U}$ 中存在有限子族（开集族）$\mathscr{D}$ 覆盖 A，则称集合 A 有**有限子覆盖**。一个集合族 $\mathscr{H}$ 称为是具有**有限交性质**是指它的任意有限子族的交非空。

定义 2.2 称拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是紧的，是指 X 的每个开覆盖具有有限子覆盖。X 的子集 A 称为是紧集是指 A 的每个开覆盖有有限子覆盖。

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，设 E 为 X 的闭集，令

$$\mathscr{D}=\{E\cap G|G\in\mathscr{T}\}$$

容易证明集族 $\mathscr{D}$ 满足注 2.3 关于拓扑的定义，于是$(E,\mathscr{D})$也是一个拓扑空间，称为是 X 的**拓扑子空间**，并称 $\mathscr{D}$ 为相对拓扑。称 $\mathscr{D}$ 中的集合为相对开集，对于 X 中的闭集 F，称 $E\cap F$ 为相对闭集。

下面是一般拓扑空间上紧性的等价描述。

定理 2.7 设$(X,\mathscr{T})$为一拓扑空间，则 X 为紧的当且仅当它的每个具有有限交性质的闭集族具有非空的交；$A\subseteq X$ 为紧集当且仅当 A 的闭子集族如有有限交性质，则必有非空的交。

证明 设 $\mathscr{E}$ 是 X 的子集族，则由德·摩根律，

$$\{\bigcup\{E|E\in\mathscr{E}\}\}^c=\bigcap\{E^c|E\in\mathscr{E}\}$$

因此 $\mathscr{E}$ 是 X 的覆盖当且仅当 $\mathscr{E}$ 中集合之余集的交为空集。X 为紧的，当且仅当一个开集族，如果它的每个有限子集族都不能覆盖 X，则这个开集族不能覆盖 X；从而当且仅当任一个闭集族，如果它具有有限交性质，必有非空的交。

A 为紧集$\Leftrightarrow$对任意的开集族$\{G_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，若 $A\subseteq\bigcup\{G_\lambda\}$，则存在有限个开集使

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}$$

$$\Leftrightarrow A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap G_\lambda)$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap G_{\lambda_i})$$

这等价于$(A,\mathscr{D})$为紧空间，这里$\mathscr{D}=\{A\cap G \mid G\in\mathscr{T}\}$为相对拓扑。由第一部分的证明便知，$A$ 为紧集当且仅当 A 的具有有限交性质的闭子集族有非空的交。 □

下面我们将要用连续性公理证明$(\mathbf{R},\mathscr{U})$中的有界闭集是紧集（见定理 2.10 之(4)）。在这里我们首先要指出，在 $\mathbf{R}$ 上紧性定义中的开覆盖可以用开区间的覆盖来代替。

定理 2.8 设 E 为有界集，则 E 为紧的当且仅当对于 E 的任意开区间覆盖存在有限子覆盖。

证明 必要性是显然的，因为开区间也是开集。往证充分性，设 E 为有界集，即存在 $M>0$，使 $E\subseteq[-M,M]$. 如有开集族$\{G_i \mid i\in I\}$覆盖 E，不妨设这里的每个 G_i 都是有界集，比如都含于$[-M-1,M+1]$. 由定理 2.2，每个 G_i 都可表示为至多可列个开区间 I_{ij}的并，从而

$$E\subseteq\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{ij}$$

由条件，存在有限个开区间 $I_{i_1j_1},I_{i_2j_2},\cdots,I_{i_nj_n}$覆盖 E，于是有限开集族 $G_{i_1},G_{i_2},\cdots,G_{i_n}$覆盖 E，所以 E 为紧集。 □

下面的定理说明连续性公理的含义。

我们用 $A|B$ 表示实数集的一个分划，亦即 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\varnothing$，$A\neq\varnothing$，且 A 中的数均小于 B 中的数。称这里的 A 为分划的下组，B 为分划的上组。

定理 2.9 连续性公理与下面的命题等价：设 $A|B$ 是实数集的一个分划，如 A 中无最大的数，则 B 中必有最小的数；如 B 中无最小的数，则 A 中必有最大的数。

证明 设连续性公理成立，如果 A 中无最大的数，那么 A 的上确界 s 不属于 A（否则 s 便为 A 的最大数），于是 $s\in B$. 对于任意的 $y\in B$，y 都是 A 的上界，故 $s\leqslant y$，所以 s 为 B 的最小数。命题后

半部分的证明是类似的。

反之，设 E 为有上界的集合，令 B 为严格大于 E 中每个数的全体实数，则 $B^c|B$ 构成实数集的一个分划。由假设，分划 $B^c|B$ 确定了一个实数 s，它或是 B^c 的最大数，或是 B 的最小数，往证 s 就是 E 的上确界。易知 s 大于等于 E 中的每个数，事实上，对任意的 $x\in E\subseteq B^c$，故 $x\leqslant s$. 剩下只须证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in E$，使 $x'>s-\varepsilon$. 若不然，则对任意的 $x\in E$，有 $x\leqslant s-\varepsilon$. 于是，由

$$s-\frac{\varepsilon}{2}>s-\varepsilon\geqslant x$$

则 $s-\varepsilon/2\in B$，但 $s-\varepsilon/2<s$，$s-\varepsilon/2\in B^c$，矛盾。 □

由此定理可知，对于实数集的分划要么下组有最大元，此时上组必无最小元；要么分划的上组有最小元，此时下组必无最大元。不会出现上组有最小元，下组又有最大元的情形。因为上组与下组互余，这两个元不可能相等，而如果它们不等，则界于其间的数既不属于上组，又不属于下组，与分划的定义矛盾。这正说明了实数集的“连续性”。

定理 2.10 以下的命题是等价的：

(1) 连续性公理；

(2) 单调有界定理（任意的单调有界序列必有极限）与阿基米德公理；

(3) 区间套定理，即如 $\{[a_n,b_n]|n\in\mathbf{N}\}$ 为一个闭区间套，满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0 \qquad (2-3)$$

则有唯一的 c 属于每一个闭区间；

(4) 有限覆盖定理（E. Borel 定理）（每个有界闭集都可被有限个开区间所覆盖）与阿基米德公理；

(5) Bolzano-Weierstrass 预备定理（任何有界序列有收敛的子序列）与阿基米德公理；

(6) Cauchy 收敛原理与阿基米德公理成立。

Cauchy 收敛原理即完备性公理：序列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N$，当$n,m>N$时

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{2-4}$$

证明 首先我们证明连续性公理可推出阿基米德公理：为此反设对$y>x>0$，对一切$n\in\mathbf{N}, nx\leqslant y$. 令$A=\{nx\leqslant y|n\in\mathbf{N}\}$，则$A$是非空集，而且有上界$y$. 由连续性公理，集合$A$有上确界，记为$y'$. 那末存在$n'$，使$n'x>y'-x$，从而$(n'+1)x>y'$. 这与$y'$为集合$A$的上界矛盾，故阿基米德公理成立。

(1)→(2) 设$\{x_n\}$是一个单调非降的有界序列，则由连续性公理存在上确界β. 于是，对任意的$\varepsilon>0$，在序列中有x_{n_0}，使$\beta-\varepsilon<x_{n_0}\leqslant\beta$. 所以当$n>n_0$时，

$$\beta - \varepsilon < x_n \leqslant \beta$$

即序列$\{x_n\}$有极限β. 对有界非增序列存在极限的证明是类似的。

(2)→(3) 设$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}], n\geqslant 1$，则$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别是单调递增与单调递减序列。从而由(2)分别存在着极限α,β. 故$0\leqslant\beta-\alpha\leqslant b_n-a_n$. 由(2-3)式，对任意的$\varepsilon>0$，对充分大的$n$有$b_n-a_n<\varepsilon$，故$0\leqslant\beta-\alpha<\varepsilon$. 由阿基米德公理成立(注(2-1)可知$\beta=\alpha$. 这表明$\beta=\alpha$属于套中的每个区间。

(4)⇔(3) 由定理 2.7 可知，有限覆盖定理的成立表明$\mathbf{R}$的有界闭集是紧集，这等价于它的具有限交性质的闭子集族有非空的交。设$\{[a_n,b_n]\}$为区间套，则它是$[a_1,b_1]$的具有限交性质的闭子集族，因而有唯一的元属于每个套中的区间(唯一性由阿基米德公理得到)，(3)得证。

设$F\subseteq[a,b]$是有界闭集，$\mathscr{G}$为F的开覆盖族。如果F没有有限子覆盖，则$F\cap[a,(a+b)/2]$，$F\cap[(a+b)/2,b]$二者必有一个没有有限开覆盖，记为$F\cap[a_1,b_1]$. 将$[a_1,b_1]$再等分，同样可得F

$\cap[a_2,b_2]$没有有限开覆盖，如此则得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，而$F\cap[a_n,b_n]$没有有限开覆盖。由区间套定理，存在唯一的$\zeta$属于每个$[a_n,b_n]$，而对某个$\varepsilon>0$，$(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)\in\mathscr{G}$. 因此，对充分大的$n$，$F\cap[a_n,b_n]$可被一个区间覆盖，这与区间套的定义矛盾，故有限覆盖定理成立。下面将证明(3)意味着连续性公理，因而阿基米德公理成立。

(3)→(1)设A为有上界的数集。任取A的一个上界b，任取$a\in A$，则$[a,b]\cap A$没有上确界。将$[a,b]$二等分，如右边的区间不含A的元素，则左边的区间必含A的元素，记左边的区间为$[a_1,b_1]$；否则右边的区间含A的元素，此时记右边的区间为$[a_1,b_1]$. 然后将$[a_1,b_1]$二等分，照上面的方法得到$[a_2,b_2]$. 依次下去，于是我们得到一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$，每个$[a_n,b_n]$包含A的点，且不存在A中的点大于b_n. 由区间套定理，存在c属于套中的一切区间。容易看出不存在A中的点$c'>c$，否则当n充分大时将有A的点大于b_n，这与区间套的构造矛盾。另一方面，因为$a_n\to c$，对任给的$\varepsilon>0$，存在$a_n>c-\varepsilon$，而$a_n\in A$，因此c便是A的上确界，得证。

(3)→(5)设$a\leqslant x_n\leqslant b,n\geqslant1$. 把$[a,b]$二等分必有一个区间含有$A=\{x_n\}$中无限个点，记这个区间为$[a_1,b_1]$，并任取一个$A$中的点，记为$x_{n_1}$. 再将$[a_1,b_1]$二等分，记含有无限个$A$中点的子区间为$[a_2,b_2]$，并取$x_{n_2}\in A\backslash\{x_{n_1}\}$，如此则得到一列$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$. 由区间套定理存在$\zeta\in[a_n,b_n],n\geqslant1$，而$\zeta=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$.

(5)→(6)必要性显然，往证条件的充分性。取$\varepsilon=1$，则存在N_1，当$n,m>N_1$时，

$$|x_n|<1+|x_m|$$

$\{x_n|n>N_1\}$是一个有界序列，从中可选出一个收敛到极限l的子序列$\{x_{n_k}\}$. 于是对任意的$\varepsilon>0$，存在K_0，当$k>K_0$时，

$$|x_{n_k}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对此 $\varepsilon>0$，由(2-4)式，存在 N，当 $n,m>N$ 时，$|x_n-x_m|<\varepsilon/2$，令 $M=\max(K_0,N)$，当 $n>M,k>M$ 时，$n_k>k>M\geqslant N$，所以

$$|x_n - l| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \varepsilon$$

条件的充分性得证。

(6)→(3) 由(2-4)式，对任给的 $\varepsilon>0$，取 N 充分大，使 $0\leqslant b_N-a_N<\varepsilon$，于是当 $n,m>N$ 时，

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, |b_n - b_m| < \varepsilon$$

因此，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均有极限，且由阿基米德公理可知，这两个序列的极限唯一，记为 c. 于是 $c\in\bigcap\{[a_n,b_n]|n\in\mathbf{N}\}$. □

由定理 2.8，有限覆盖定理也可说成是：$\mathbf{R}$ 上的每个有界闭集为紧集。而上面定理的各个命题都可看成是有界闭集具有紧性的不同的刻划。

设序列 $A\triangleq\{x_n\}\subseteq\mathbf{R}$，如果它无上界，即对任意的自然数 k，总存在 x_{n_k}，使得 $x_{n_k}>k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=+\infty$；如果序列 A 无下界，即对任意的自然数 k，存在 $x_{n_k}\leqslant -k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=-\infty$；如果序列 A 既有上界又有下界，即 A 有界，则由 Bolzao-Weistrass 定理，存在着收敛的子列。它们的极限，包括上述的 $+\infty$，$-\infty$ 统称为是序列 A 的部分极限。这些部分极限中最大者，称为是序列 $A=\{x_n\}$ 的**上极限**，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；而这些部分极限中最小者，称为是序列 $A=\{x_n\}$ 的**下极限**，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.

定理 2.11 序列 $A=\{x_n\}$ 的上、下极限恒存在，而且它们相等是序列 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在极限的充要条件。

证明 首先，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$（$l$ 为有限数或 $\pm\infty$），则 $\{x_n\}$ 的一切部分极限都将是 l.

由上面的叙述可知，如果 $\{x_n\}$ 上无界，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n = +\infty$$

如果$\{x_n\}$有上界，即$x_n \leqslant M$，由连续性公理，存在上确界：

$$M_k = \sup\{x_n | n > k\} \leqslant M$$

M_k关于k是单调不增的，从而

$$\lim_{k\to\infty} M_k$$

必存在，有限或等于$-\infty$.

如果这极限是$-\infty$，则对于任意的$E>0$，必存在N，使$M_N < -E$，而当$n>N$时，$x_n \leqslant M_N < -E$. 这说明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

容易看出，此时$\{x_n\}$的一切部分极限都将是$-\infty$，因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

现在假设$M^* \triangleq \lim_{k\to\infty} M_k$有限。首先可证$M^*$具有特性：$\forall\ \varepsilon>0$，

(1)序列A中只有有限个元素大于$M^*+\varepsilon$，即存在N'，当$n>N'$时，$x_n < M^*+\varepsilon$.

事实上，存在$N' \in \mathbf{N}$，使$M'_N < M^*+\varepsilon$，故当$n>N'$时，$x_n \leqslant M'_N < M^*+\varepsilon$.

(2)序列中有无限个元素大于$M^*-\varepsilon$，即对任意的$N \in \mathbf{N}$，必有$n'>N$使$x_{n'} > M^*-\varepsilon$.

事实上，对任意的N必有$M_N \geqslant M^*$，而由M_N的定义故有$n'>N$，使$x_{n'} > M^*-\varepsilon$.

往证$M^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. 首先证明$M^*$是$A$的一个部分极限，为此取$\varepsilon = 1/m$，则由(1)，存在$N'_m$，使当$n'>N'_m$时，$x_n < M^*+1/m$. 由(2)，存在$n_m > N'_m$，使

$$x_{n_m} > M^* - 1/m,$$

然而$n_m > N'_m$，故$x_{n_m} < M^*+1/m$. 从而A的子序列$\{x_{n_m}\}$收敛到M^*.

现在证明没有一个部分极限超过M^*. 事实上，如果A中有子

列 x_{n_i} 收敛到 a. 则由特性(1),当 n_i 充分大时,$x_{n_i} \leqslant M^* + \varepsilon$,令 $i \to \infty$,则得 $a \leqslant M^* + \varepsilon$,由 ε 的任意性,则 $a \leqslant M^*$. 从而 $M^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

完全类似可证下极限的存在,且当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ 时,则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

而当下极限是有限数 M_* 时,M_* 具有特性:对任意的 $\varepsilon > 0$,

(1) 序列 A 中只有有限个元素不大于 $M_* - \varepsilon$;

(2) 序列 A 中有无穷个元素小于 $M_* + \varepsilon$.

最后,若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 有限或 $\pm\infty$,则 A 的一切部分极限都将与它重合;反之,若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$(或 $-\infty$),则由上述可知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty (\text{或} -\infty)$$

而当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ 有限时,$M^* = M_* \triangleq a$. 则由 M^*, M_* 的特性(1),对任意的 $\varepsilon > 0$,A 中元素大于 $a + \varepsilon$,小于 $a - \varepsilon$ 都只有有限个,换言之存在 N,当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

由上述可知,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{k\to\infty} M_k = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{n>k} \{x_n\} \tag{2-5}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{n>k} \{x_n\} \tag{2-6}$$

□

一个序列 $\{x_n\}$ 可能不存在极限,但由上面的定理可知,上、下极限总是存在的。

上述证明中我们并不依赖 Bolzano-Weirstrass 预备定理,而且读者还可用定理 2.11 去证明 Bolzano-Weirstrass 定理。

在结束本节之前,我们介绍 Stolz 定理,对今后的论证将带来方便。众知,对于 ∞/∞ 型的极限,洛必大法则起很大的作用,但这

只适合于函数极限的情形。在序列极限的情形，我们有：

定理 2.12　(Stolz)设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$为两个序列，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且对于一切充分大的$n$，$y_n$严格增大，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

只要右端的极限存在(有限或无限)。

证明　首先假定右端极限有限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=r$$

则对任意的$\varepsilon>0$，存在自然数k，当$n\geqslant k$时，

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-r\right|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ 且 }y_n-y_{n-1}>0$$

所以，下面的分式都介于$r-\varepsilon/2$，与$r+\varepsilon/2$之间：

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k},\frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{y_{k+2}-y_{k+1}},\cdots,\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

易知，将上述分式的分子、分母分别相加所得的分式也介于两数之间：

$$\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-r\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(2-7)$$

应用恒等式

$$\frac{x_n}{y_n}-r=\frac{x_k-ry_k}{y_n}+\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-r\right)$$

便得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-r\right|\leqslant\left|\frac{x_k-ry_k}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-r\right|$$

由$y_n\to\infty$，以及(2－7)式，则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=r$$

如果所要证明式子的右端的极限为$+\infty$，则对充分大的n，x_n-

$x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$，因此对充分大的 n 将有 $x_n \to +\infty$. 那末由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$$

□

例 2-3 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则算术平均值序列

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

证明 置

$$x_n=a_1+_2+\ldots+a_n, \text{及 } y_n=n$$

由 Stolz 定理得证。

□

例 2-4 设

$$z_n=\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

在 Stolz 定理中令 $x_n=1^k+2^k+\ldots+n^k, y_n=n^{k+1}$，则由 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

但 $(n-1)^{k+1}=n^{k+1}-(k+1)n^k+\cdots$ 因此，

$$n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=(k+1)n^k+\cdots$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots}=\frac{1}{k+1}$$

下面的例子是一个有用的命题，其证明留给读者。

例 2-5 设 $a_n\to 0, b_n\to 0$，且对充分大的 n，b_n 严格递减，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

只要右端的极限存在(有限或无限)。

§ 2.4 连续性

连续函数是高等数学中的重要概念，下面先给出在一般拓扑空间上连续函数的定义，然后指出高等数学中连续函数只是一个特例。

在一般拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中，称包含点x的任意开集为x的**开邻域**，称包含一个开邻域的任意的集合为x的**邻域**。

定义 2.3　设$(X,\mathscr{T})$，$(X,\mathscr{U})$为两个拓扑空间，称函数(映射)$f:X\to Y$为**连续的**，是指：每个开集的逆象是开的，亦即对于$\mathscr{U}$中每个U，

$$f^{-1}(U)\in\mathscr{T}$$

定理 2.13　设X,Y是两个拓扑空间，$f:X\to Y$，则下列命题等价：

(1)　函数f是连续的；

(2)　每个闭集的逆像是闭的；

(3)　对于X中的每个x，$f(x)$的每个邻域的逆像是x的邻域；

(4)　对于X中每个x，及$f(x)$的每个邻域U，存在x的邻域V，使得

$$f(V)\subseteq U;$$

(5)　对于X中每个收敛到x的序列$A=\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$，$f(A)=\{f(x_n)|n\in\mathbf{N}\}$收敛到$f(x)$.

下面的证明中，称序列$A=\{x_n,n\in\mathbf{N}\}$以某邻域V为**归宿**是指，存在$N\in\mathbf{N}$，对一切$n>N$，有$x_n\in V$.

证明　(1)↔(2)因为开集与闭集互余，而

$$f^{-1}(Y\backslash B)=\{x\in\mathbf{N}|f(x)\in Y\backslash B\}=X\backslash f^{-1}(B)\tag{2-8}$$

如果 B 为 Y 的闭集，则 $Y\backslash B$ 是 Y 中的开集，(2－8)式左边为 X 的开集，因此 $f^{-1}(B)$ 为 X 的闭集；反之，设 B 为 Y 中的开集，则 $Y\backslash B$ 是闭集，它的逆集为闭集，即(2－8)式左边为闭集，从而 $f^{-1}(B)$ 为开集，故 f 连续。

(1)→(3) 设 $x\in X$，V 是 $f(x)$ 的一个邻域，则 V 包含 $f(x)$ 的一个开邻域 W，从而 $f^{-1}(W)$ 是 x 的开邻域，而 $f^{-1}(W)\subseteq f^{-1}(V)$. 因此后者是 x 的邻域。

(3)→(4) 设 U 是 $f(x)$ 的邻域，则由(3)，$f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域。由于对任意的 $y\in f^{-1}(U)$，$f(y)\in U$，故 $f(f^{-1}(U))\subseteq U$.

(4)→(5) 设 U 是 $f(x)$ 的邻域，则由(4)，存在 x 的邻域 V，使得 $f(V)\subseteq U$. A 以 V 为归宿，故 $f(A)$ 为 U 为归宿。

(5)→(2) 设 B 为闭集，往证 $f^{-1}(B)$ 是闭集。任取 $f^{-1}(B)$ 中的收敛到 x_0 的序列 $\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，则 $\{f(x_n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ 为 B 中收敛到 $f(x_0)$ 的序列。B 是闭集，因此 $f(x_0)\in B$，故 $x_0\in f^{-1}(B)$，因此 $f^{-1}(B)$ 为闭集。 □

如果 X,Y 都是 $(\mathbf{R},\mathscr{U})$，或者 X 是 $\mathbf{R}$ 中的一个闭区间 $[a,b]$，此时在 $[a,b]$ 上赋予相对拓扑，我们可以证明，这里函数连续性的定义等价于高等数学中关于函数连续性的定义。事实上，设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $U=(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$，由(4)，存在 x 的邻域 V，于是存在 $(x-\delta,x+\delta)\subseteq V$，使得当 $|y-x|<\delta$ 时，$f(y)\in U$，即 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 这就是高等数学中关于连续的定义。反之，如果对 $x\in(a,b)$，$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|y-x|<\delta$，$y\in(a,b)$ 时，成立 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 那么对于 $f(x)$ 的任意邻域 U，取充分小的 $\varepsilon>0$ 使 $(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\subseteq U$，于是存在 $\delta>0$，使得当 $|y-x|<\delta$ 时，$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 取 $V=(x-\delta,x+\delta)$，则 $f(V)\subseteq U$，所以 f 连续。

下面讨论紧集上连续函数的性质，这对于 $\mathbf{R}$ 上的函数来说就是讨论有界闭集上连续函数的性质。

称定义在 $A\subseteq \mathbf{R}$ 上的函数 f **一致连续**，是指对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $x,y\in A$，只要 $|x-y|<\delta$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 要理解这个定义，我们必须指出函数在一点 x 连续的定义中，对 $\varepsilon>0$，所存在的 $\delta>0$ 一般地与 x 有关，而一致连续的定义中，δ 与 x 无关。下面的例子表明连续函数不一定一致连续。

例 2-6 证明 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $[c,1)(c>0)$ 上一致连续，而在 $(0,1)$ 上连续而不一致连续。

证明 当 $c<x,y<1$ 时，

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2xy}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2xy}\right|\leqslant\frac{|x-y|}{xy}\leqslant\frac{|x-y|}{c^2}$$

故只要 $|x-y|<c^2\varepsilon$，便有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

所以，$f(x)$ 在 $[c,1]$ 上一致连续。容易证明它在 $(0,1)$ 连续，但若取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x'_n=\dfrac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$，则 $|f(x_n)-f(x'_n)|=2$，而

$$|x_n-x'_n| = \frac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0(n\to\infty)$$

只要取 $\varepsilon<2$，则对任意的 $\delta>0$，当 n 充分大时，总可以找到 x_n,x'_n，虽然 $|x_n-x'_n|\leqslant\delta$，但 $|f(x_n)-f(x'_n)|=2>\varepsilon$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。 □

定理 2.14 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数（即 f 在 (a,b) 上连续，f 在 a 处右连续，在 b 处左连续），则

(1) f 在 $[a,b]$ 上有界；

(2) f 在 $[a,b]$ 上取到最大、最小值；

(3) （介值定理）设 $f(a)=A$，$f(b)=B$，则对介于 A,B 之间

的实数 C 存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

(4) (康托 Cantor 定理)f 在$[a,b]$上一致连续。

证明 (1)对任意的 $x_0\in[a,b]$，由连续性的定义，取 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1$. 开区间族

$$\{(x_0-\delta,x_0+\delta)\,|\,x_0\in[a,b]\}$$

组成了$[a,b]$的开覆盖，因为$[a,b]$是紧集，它有有限覆盖：

$$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\cdots,(x_n-\delta_n,x_n+\delta_n)$$

也就是说，$[a,b]$中任意的 x，都属于上述有限个开区间之一。令

$$M=\max\{|f(x_1)|+1,|f(x_2)|+1,\cdots|f(x_n)|+1\}$$

则$\forall\ x\in[a,b]$，$|f(x)|\leqslant M$，得证。

(2)由习题二之 12，23，$f([a,b])$为紧集，从而 $f([a,b])$为有界闭集。由连续性公理它有上、下确界，它们分别是闭集 $f([a,b])$中元素列的极限，因此属于 $f([a,b])$，它们就是 f 在$[a,b]$上的最大、最小值。

(3)不妨设 $A<B$，令 $\varphi(x)=f(x)-C$，则 $\varphi(a)<0,\varphi(b)>0$，我们只要证存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\varphi(\xi)=0$. 这是与介值定理等价的命题，我们称之为零值定理。往证零值定理：将$[a,b]$二等分，则必有一个子区间(记为$[a_1,b_1]$)，φ 在$[a_1,b_1]$两端点的值异号；再将$[a_1,b_1]$二等分，仍然有一个子区间(记为$[a_2,b_2]$)，φ 在两端点异号；如此便得到一个区间套$\{[a_n,b_n]\,|\,n\geqslant1\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. $\varphi(a_n)<0,\varphi(b_n)>0$. 由区间套定理，存在 $\xi\in[a_n,b_n]$，$n\geqslant1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，由于 φ 仍在(a,b)连续，因此 $\varphi(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(a_n)\leqslant0$，$\varphi(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(b_n)\geqslant0$. 从而 $\varphi(\xi)=0$. 零值定理(因而介值定理)得证。

(4)对任意的 $\varepsilon>0$，由 f 的连续性，对每个 $x\in[a,b]$，存在开区间 $I_x=(x-\delta_x,x+\delta_x)$，使当 $y\in I_x$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. 于是，对 I_x 中任意两点 y,y'，有

$$|f(y) - f(y')| < \varepsilon$$

令

$$I_x = (x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})$$

开区间族$\{J_x | x \in [a,b]\}$覆盖$[a,b]$，从而存在有限的开覆盖：

$$J_{x_1}, J_{x_2}, \cdots, J_{x_m}$$

令

$$\delta = \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \cdots, \frac{\delta_{x_m}}{2}\}$$

则当$x, x' \in [a,b]$，$|x-x'|<\delta$时，x'必属于某个J_x，即$|x'-x_i|<\delta_{x_i}/2$. 于是$|x-x_i|<|x-x'|+|x'-x_i|<\delta_{x_i}$，这表明$x, x'$同属于$I_{x_i}$. 所以，$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 一致连续性得证。 □

下面的所谓压缩映像原理将在泛函分析以及各种应用领域中遇到。

定理 2.15 **不动点原理** 设$T:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是一个映射，且存在$0 \leqslant \alpha < 1$，对任意的$x, y \in \mathbf{R}$，有

$$|Tx - Ty| \leqslant \alpha |x - y| \qquad (2-9)$$

（满足(2－9)式的映射称为是**压缩映射**。）则存在唯一的$x \in \mathbf{R}$，使得

$$Tx = x \qquad (2-10)$$

（方程(2-11)的解，称为是**不动点**。）

证明 任取$x_0 \in \mathbf{R}$，并令

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots$$

则

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |Tx_n - Tx_{n-1}| \\ &\leqslant \alpha |x_n - x_{n-1}| \qquad (2-11) \\ &\leqslant \cdots \leqslant \alpha^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

从而，

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \dots + \alpha^n)|x_1 - x_0| \\
&\leqslant \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}|x_1 - x_0| < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \quad (2-12)
\end{aligned}
$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$，所以$\{x_n\}$是一个基本列。由完备性公理存在极限：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

在 $Tx_n = x_{n+1}$两边令 $n\to\infty$，由于

$$|Tx_n - T\xi| \leqslant \alpha|x_n - \xi| \to 0$$

则得：

$$T\xi = \xi$$

往证不动点的唯一性。事实上，如果 η 也是不动点，则

$$|\xi - \eta| = |T\xi - T\eta| \leqslant \alpha|\xi - \eta|$$

因为 $0\leqslant\alpha<1$，故 $\xi=\eta$. □

例 2-7 刻普勒(Kepler)方程 著名的 Kepler 方程

$$E = M + \varepsilon\sin E$$

描述一个行星在其轨道上的位置，其中 $M=n(t-\tau)$，这里 $n=2\pi/T$，为平均角速度，τ 为行星通过近地点的时刻，t 为当前时刻。因此，M 为行星由近地点起按平均角速度运动所走过的角度，故称为平近点角。E 为偏近点角，如图 2-1 所示，ε 为行星轨道的离心

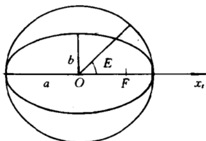


图 2-1

率，F 为地球所在的位置。令

$$TE = M + \varepsilon \sin E$$

容易看出 T 是一个压缩映射，因此 Kepler 方程有唯一的解，而且定理的证明还给出了逐次逼近的求解的方法。

习题二

1. 证明上确界的等价定义，即设 $E \subseteq \mathbf{R}$ 有上界，则 $\alpha = \sup E \Leftrightarrow \forall x \in E, x \leqslant \alpha$；且 $\exists x_n \in E, n \geqslant 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

试建立关于下确界相应的结论。

2. 试证：若 $\sup E = \alpha \notin E$，则存在 E 中严格递增的序列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

3. 对于实数集 E，记 $-E = \{-x \mid x \in E\}$，试证：

$$\inf\{-E\} = -\sup E, \sup\{-E\} = -\inf E$$

4. 若 $A \subseteq B$，试证 $\sup A \leqslant \sup B, \inf A \geqslant \inf B$.

5. 试证：$\sqrt{2}$，$\log 2$，$\sin 1°$，$0.1234567891011\ldots$ 是无理数。

6. 证明

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{Q_n}{n \cdot n!}, (0 < Q_n < 1)$$

进而证明 e 是无理数。

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，$c \in \mathbf{R}$，试证：$E = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \geqslant c\}$ 是闭集，而 $F = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) > c\}$ 是开集。

8. 求下列数集的导集：$\mathbf{N}$；$\varnothing$；(a,b)；Q；$\bar{Q}$.

9. 试证任意集合的导集是闭集。

10. 设 $A \subseteq \mathbf{R}$ 为有界闭集，$\sup A = \alpha$，试证：$\alpha \in A$.

11. 试证 $\mathbf{R}$ 的有界无限点集至少有一个聚点。

12. 设 $A \subseteq \mathbf{R}$，则 A 为紧集当且仅当它为有界闭集。

13. 试用区间套定理证明：单调有界的数列必收敛。

14. 试用连续性公理证明区间套定理。

15. 试用连续性公理证明有限覆盖定理。

16. 设$[a,b]$是有界闭区间，试证：x 是$[a,b]$的聚点当且仅当 $x\in[a,b]$.

17. 设$\{x_n\}$为一数列，试证或者存在一个子序列发散到$+\infty$，或者存在一个子序列发散到$-\infty$，或者存在一个收敛的子序列。

18. 试证 $x_n=\sin n, n=1,2,\cdots$发散。

19. 设 $a>0, x_1>0$，而

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{a+3x_n^2}, n=1,2,\ldots$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

20. 若存在 $M>0$，使对任意的 $n\in\mathbf{N}$，

$$\sum_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|\leqslant M,$$

试证$\{x_n\}$收敛。

21. 试证：$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots$收敛，而 $y_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$发散。

22. 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$且单调，若数列 $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$，$n=1,2,\cdots$收敛，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

23. 设$(X,\mathscr{T})$为紧空间，$f:X\to Y$ 为连续函数，试证：$f[X]$是 Y 上的紧集。

24. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且不为常数，证明 $f([a,b])$为一个区间。

25. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且对于任意的有理数 $r\in[a,b]$，有 $f(r)=0$，证明：对 $a\leqslant x\leqslant b$，有 $f(x)=0$.

26. 试证 $\mathbf{R}$ 上连续的周期函数必一致连续。

27. 设 $f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\in\mathbf{R}$，试证：$f(x)$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上有界且一致连续。

28. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=0$，试证 $f(x)$ 在 (a,b) 上必有最大值或最小值。

29. 试证：方程 $x^n+px+q=0$（其中 p,q 为实数），当 n 为偶数时至多有两个实根，当 n 为奇数时至多有三个实根。

30. 试举例说明连续函数不一定把开集（闭集）变为开集（闭集）。

第三章　积分理论

我们从高等数学中的黎曼积分开始讨论。

§3.1　黎曼积分

设 $f(x)$是在闭区间$[a,b]$上定义的函数，对$[a,b]$引入分割 T：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \qquad (3-1)$$

记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，称 $d(T) = \max\{x_i - x_{i-1} | i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为该分割的直径，在区间 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ 中任取 ξ_i，作和式（称为**积分和**）

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \qquad (3-2)$$

如果当 $d(T) \to 0$ 时，不论 ξ_i 在 Δ_i 中如何选取，σ 都趋于相同的极限，即

$$\lim_{d(T) \to 0} \sigma = I \qquad (3-3)$$

则称函数 f 在$[a,b]$上**黎曼可积**，并称其极限值 I 为 f 在$[a,b]$上的黎曼积分（或定积分），记为

$$I = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

定理 3.1　设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $f(x)$必在$[a,b]$上有界。

证明　如果 $f(x)$在$[a,b]$上无界，则对$[a,b]$的任意分割 T，

$f(x)$必在某一个子区间 $\Delta_i \triangleq [x_{i-1}, x_i]$ 上无界，亦即对任意的 $M>0$，存在 $\eta_i \in \Delta_i$，使得

$$f(\eta_i)\Delta x_i > M \tag{3-4}$$

对任意的 $H>0$，令

$$M = H - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} f(x_i)\Delta x_j$$

则由(3—4)式，存在 $\eta_i \in \Delta_i$，使

$$f(\eta_i)\Delta x_i > H - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} f(x_i)\Delta x_j$$

从而存在一个积分和

$$f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\eta_i)\Delta x_i + \cdots + f(x_n)\Delta x_n > H$$

这表明积分和发散，于是 $f(x)$不可积，矛盾。 □

如果 f 在$[a,b]$上有界，则在每个闭区间$[x_{i-1}, x_i]$上，f 有上确界 M_i，下确界 m_i，显然

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sigma \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{3-5}$$

记上式左边的和式为 s，称为 f 的**达布下和**，记右边的和式为 S，称为 f 的**达布上和**。现在我们考察一下，当分点增加时上、下和的变化。设在区间$[x_i, x_{i+1}]$中增加一点 x'，得到两个区间$[x_i, x']$，$[x', x_{i+1}]$，记 $f(x)$在这两个子区间中的上确界分别为 M_{i1}, M_{i2}，则有 $M_{i1} \leqslant M_i$，$M_{i2} \leqslant M_i$，于是

$$M_{i1}(x' - x_i) + M_{i2}(x_{i+1} - x') \leqslant M_i(x_{i+1} - x_i) \tag{3-6}$$

因此，当分点增加时达布上和不增，同理可知达布下和不减。如果记 f 在$[a,b]$上的上、下确界分别为 M, m，易知一切达布下和小于 $M(b-a)$，一切达布上和大于 $m(b-a)$. 于是，一切达布上和的集合$\{S\}$有下确界 L，而一切达布下和的集合$\{s\}$有上确界 l，而且

$$s \leqslant l \leqslant L \leqslant S \tag{3-7}$$

由上述积分的定义，积分存在当且仅当达布上和、下和趋于相同的极限，此时积分值

$$I = l = L$$

称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在 I_i 上的振幅。显然，当 $\mathrm{d}(T)$ 趋于 0 时上、下和趋于相同的极限当且仅当

$$\lim_{\mathrm{d}(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0 \tag{3-8}$$

上面的论述可写成下面的定理。

定理 3.2　设 f 在$[a,b]$上有界，则 f 可积的充要条件是

$$\lim_{\mathrm{d}(T)\to 0} (S - s) = 0$$

它也等价于(3－8)式成立。

证明

必要性：设 f 在$[a,b]$上可积，则由定义对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意的如(3－1)的分割 T，当 $\mathrm{d}(T)<\delta$ 时，不论 ξ 在 I_i 中如何选取，都有

$$|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3-9}$$

由上确界的定义，存在 $\eta_i \in I_i$，使 $0 \leqslant M_i - f(\eta_i) < \varepsilon/2(b-a)$. 于是，

$$\left|S - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\eta_i))\Delta x_i\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} \tag{3-10}$$

而因为 $\eta_i \in I_i$，故由(3－8)，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而，$|S-I| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. 亦即 $\lim\limits_{\mathrm{d}(T)\to 0} S = I$.

同理可证 $\lim\limits_{\mathrm{d}(T)\to 0} s = I$，于是 $\lim\limits_{\mathrm{d}(T)\to 0} (S-s) = 0$.

充分性：设 $\lim\limits_{\mathrm{d}(T)\to 0} S = \lim\limits_{\mathrm{d}(T)\to 0} s = I$. 而对于任意的分割 T，以及 $\xi_i \in$

I_i,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

令 $d(T) \to 0$,则得 $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma = I$.

最后,由于

$$|S - s| = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$$

可知,f 可积等价于(3—8)成立。 □

要使 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0$,有两种可能,就是当 $d(T)$ 很小时,一切 ω_i 都很小,或者那些 ω_i 不很小的子区间的长度之和 $\sum' \Delta x_i$ 很小。后者意味着使得函数 $f(x)$ 不连续的区间长度很小,这就是函数可积的另一个充要条件。

定理 3.3 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:对任意的 $\varepsilon>0, \eta>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $d(T)<\delta$ 时,对应于振幅 $\omega_i \geqslant \varepsilon$ 的那些区间长度之和 $\sum' \Delta x_i < \eta$.

证明 必要性:若 $f(x)$ 可积,则对任意的 $\varepsilon>0, \eta>0$,存在 $\delta>0$,使当 $d(T)<\delta$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \eta\varepsilon$. 于是,

$$\varepsilon \sum{}' \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \eta\varepsilon$$

从而,$\sum' \Delta x_i < \eta$.

反之,如果以 $\sum'' \Delta x_i$ 表示那些使得 $\omega_i < \varepsilon$ 的子区间长度之和,记

$$\Omega \triangleq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum{}' \omega_i \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i \Delta x_i \\ &< \varepsilon \sum{}'' \Delta x_i + \Omega \sum{}' \Delta x_i\end{aligned}$$

$$< \varepsilon(b-a)+\Omega\eta$$

由 ε,η 的任意性，故

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$ □

有界不可积函数的例子如下：设

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数}\\ 0, & x\ \text{为无理数}\end{cases}$$

则 $D(x)$ 在任意闭区间 $[a,b]$ 上都是不可积的，事实上无论分割怎样细，在每个子区间上都含有有理数与无理数，因此 $\omega_i=1$. 而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})=b-a$$

不趋于 0.

下面指出的几类函数是（黎曼）可积的。

定理 3.4　设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

证明　由于 f 在 $[a,b]$ 上的一致连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当分割的直径 $d(T)<\delta$ 时，$|M_i-m_i|<\varepsilon$. 于是，

$$|S-s|<\varepsilon(b-a)$$

这表明当 $d(T)\to 0$ 时，上和、下和趋于相同的极限，因此 f 在 $[a,b]$ 上可积。 □

定理 3.5　只有有限个第一类不连续点的有界函数是可积的。

证明　设 $f(x)$ 的第一类不连续点为 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_k$，则对任意的 $\varepsilon>0,\eta>0$，存在 $\delta>0$，使 $\delta<\eta/2k$，而对任何分割 T，当 $d(T)<\delta$ 时，$f(x)$ 在不含有 $x'_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的区间 I_i 上的振幅皆小于 ε，而振幅不小于 ε 的区间长度之和小于 η，由定理 3.3 可知 $f(x)$ 可积。 □

定理中只有有限个不连续点的函数，称为是逐段连续函数，定理 3.4 表明逐段连续函数是可积的，而且在有限个点处改变一个

可积函数的值并不改变可积性，也不改变积分值。 □

定理 3.6　单调有界函数必定可积。

证明　假设 $f(x)$在$[a,b]$单调上升，则对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/(f(b)-f(a))$，对$[a,b]$的任意的分割，当 $d(T)<\delta$ 时，由于 $M_i=f(x_i)$，$m_i=f(x_{i-1})$，则

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon$$

这就证明了 $f(x)$在$[a,b]$上可积。 □

从黎曼积分的定义看出，积分就是积分和式(3－2)的极限，而积分和是区间$[x_{i-1},x_i]$长度与函数在该区间任意一点的值乘积的和。区间是一个集合，区间的长度就是一个定义在集合族上的函数，它满足非负性，可加性(也就是两个不相交的区间的并的长度等于两个区间长度之和)。把区间抽象为一般的集合，把区间的长度抽象为测度，于是就把黎曼积分推广到一般的积分。我们将看到，这种抽象是有意义的。

§3.2　测　度

测度是集合的函数，所以它应该定义在一个集合族上，因为我们要考虑并集，交集，余集甚至可列个集的并，可列个集的交的测度，所以这个集族应该对这些运算封闭。这就是下面我们引入 σ 代数的缘由。

定义 3.1　设我们所考虑的基本集合为 X，称 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 为 X 上的**集合 σ 代数**(简称为 **σ 代数**)是指它满足：

(1) $X\in\mathscr{F}$；

(2) $\mathscr{F}$ 对集合的取余运算封闭，也即如 $A\in\mathscr{F}$，则 $A^c\in\mathscr{F}$；

(3) $\mathscr{F}$ 对可列并运算封闭，也即如 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，则 A

$=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

称 $\mathscr{F}$ 中的集合为**可测集**，称$(X,\mathscr{F})$为**可测空间**。

如果上面定义中的(3)只对有限并成立，则称 $\mathscr{F}$ 为**集代数**(简称为**代数**)。

只有两个集合组成的集族$\{\varnothing,X\}$是 σ 代数，由 X 的一切子集组成的集族 $\mathscr{P}(Z)$也是 σ 代数。

设有两个集族 $\mathscr{G}$，$\mathscr{H}$，如果每个 $\mathscr{H}$ 中的集合都是 $\mathscr{G}$ 的集合，则称 $\mathscr{H}$ 含于 $\mathscr{G}$，也记为 $\mathscr{H}\subseteq\mathscr{G}$.

以集族的包含关系而论，$\{\varnothing,X\}$是最小的 σ 代数，而 $\mathscr{P}(X)$是最大的 σ 代数。

设$\{\mathscr{F}_i,i\in I\}$为一族 σ 代数，则

$$\mathscr{F}=\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$$

仍是 σ 代数。

事实上，$\varnothing$，X 属于每个 $\mathscr{F}_i$，因而属于 $\mathscr{F}$；设 $A\in\mathscr{F}$，则对每个 $i\in I$，$A\in\mathscr{F}_i$，$\mathscr{F}_i$ 是 σ 代数，故 $A^c\in\mathscr{F}_i$，从而 $A^c\in\mathscr{F}$；最后，如对每个 n，$A_n\in\mathscr{F}$，则每个 $A_n\in\mathscr{F}_i$，$i\in I$，因为 $\mathscr{F}_i$ 是 σ 代数，故

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}_i$$

这对一切 $i\in I$ 都成立，所以 $A\in\mathscr{F}$. 这就证明了一族 σ 代数的交仍是 σ 代数。但是要注意，一族 σ 代数的并不一定是 σ 代数。

设 $\mathscr{G}$ 为 X 的一个子集族，则 $\mathscr{P}(X)$是一个包含 $\mathscr{G}$ 的 σ 代数，因此包含 $\mathscr{G}$ 的 σ 代数的全体是一个集族的非空类(这里的"类"也是一个集合，不过这个集合的元素是包含 $\mathscr{G}$ 的集族)。注意到，这个类中的每个集族都是 σ 代数，所以这个非空类的交(也就是这个类中集族的交)仍然是一个 σ 代数。因为类中的每个集族都包含 $\mathscr{G}$，故它们的交也包含 $\mathscr{G}$，从而这个非空类的交仍是一个包含 $\mathscr{G}$ 的 σ 代数，称它为由集族 $\mathscr{G}$ 产生的 σ 代数，并记为 $\sigma(\mathscr{G})$. 于是，对于一切包含 $\mathscr{G}$ 的 σ 代数 $\mathscr{F}$，恒有 $\mathscr{F}\supseteq\sigma(\mathscr{G})$. 所以很自然地称 $\sigma(\mathscr{G})$

为包含$\mathscr{G}$的最小σ代数。这就引发了测度论中一个典型的证明方法，称之为通常方法。

为了证明某一σ代数中的集合具有某个性质T，我们把具有性质T的X的子集合构成一个集族$\mathscr{F}_1$. 首先验证：

(1) $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}_1$，也即证明$\mathscr{G}$中的集合具有性质$T$；

(2) 验证$\mathscr{F}_1$是一个σ代数。因为$\sigma(\mathscr{G})$是包含$\mathscr{G}$的最小σ代数，$\mathscr{F}_1$是包含$\mathscr{G}$的σ代数，则$\mathscr{F}_1\supseteq\sigma(\mathscr{G})$. 这表明$\sigma(\mathscr{G})$中的集合都具有性质$T$.

例 3-1 设$\mathscr{C}$为X的一个子集族，则对任意的$A\in\sigma(\mathscr{C})$，存在$\mathscr{C}$的可列子族$\mathscr{D}$，使得$A\in\sigma(\mathscr{D})$.

证明 令

$$\mathscr{F}=\{B\in\sigma(\mathscr{C})\mid \text{存在}\ \mathscr{C}\ \text{的可列子族}\ \mathscr{D}\ \text{使}\ B\in\sigma(\mathscr{D})\}$$

首先，对任意的$B\in\mathscr{C}$，任取一个包含B的可列子族$\mathscr{D}\subseteq\mathscr{C}$，则$B\in\sigma(\mathscr{D})$. 因此，$\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F}$.

其次，

(1) $X\in\sigma(\mathscr{C})$，而且，对$\mathscr{C}$的任意子族$\mathscr{D}$，$X\in\sigma(\mathscr{D})$，故$X\in\mathscr{F}$；

(2) 如$B\in\mathscr{F}$，则存在$\mathscr{C}$的可列子族$\mathscr{D}$，使$B\in\sigma(\mathscr{D})$. 于是，$B^c\in\sigma(\mathscr{D})$，这又表明$B^c\in\mathscr{F}$.

(3) 如$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，则对每个n，存在$\mathscr{C}$的可列子族$\mathscr{D}_n$，使$A_n\in\sigma(\mathscr{D}_n)$. 不妨设$\mathscr{D}_n=\{E_{ni}\mid i=1,2,\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$. 令$\mathscr{D}=\{E_{ni}\mid n=1,2,\cdots,i=1,2,\cdots\}$则$\mathscr{D}$是$\mathscr{C}$的可列子族，每个$A_n\in\mathscr{D}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\sigma(\mathscr{D}_n)$，于是$\mathscr{F}$对可列并封闭。

从而$\mathscr{F}$是包含$\mathscr{C}$的σ代数，故$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$，得证。 □

上面的证明方法是测度论中一种典型的证法，读者要细心体会，今后我们还会多次用到。

记$\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，$\overline{\mathbf{R}_+}=\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$这里$\mathbf{R}_+$表示非负实数全体，$+\infty$是一个广义实数，它比一切实数都大，而$-\infty$也是

一个广义实数，它比一切实数都小。并规定：对任意的实数 a

$$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$$

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\begin{cases}\pm\infty, & a>0\\ 0, & a=0\\ \mp\infty, & a<0\end{cases}$$

$$a/\mp\infty=0$$

$$\pm|a|/0=\pm\infty, a\neq 0$$

而认为

$$(\pm\infty)-(\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{a}{0}$$

无意义。

定义 3.2 设 $\mathscr{F}$ 为集合 X 上的 σ 代数，$\mu:\mathscr{F}\to\overline{\mathbf{R}_+}$ 为集合函数，满足：

(1) $\mu(\varnothing)=0$；

(2) $\forall E\in\mathscr{F}, 0\leqslant\mu(E)\leqslant+\infty$；

(3) μ 有可列可加性，也即如 $E_n\in\mathscr{F}, E_n\cap E_m=\varnothing(m\neq n)$，则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \tag{3-11}$$

则称 μ 为定义在 $\mathscr{F}$ 上的**测度**。

如果存在常数 M，使得 $\mu(X)\leqslant M$，则称测度 μ 为**有限测度**。设 $\mathscr{F}$ 为集合 X 上的 σ 代数，μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度，则称 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为**测度空间**，当 μ 为有限测度时，称 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为**有限测度空间**。

我们知道测度是从长度、面积、体积等概念抽象而来的，所以定义中(1)，(2)的要求是很自然的，长度、面积、体积都具有可加性，亦即两段不交线段之并的长度应该等于它们各自长度之和，对于面积、体积也有这种可加性。这样就不难理解定义中的条件(3).

定理 3.7 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，则

(1) 有限可加性，即如 $A,B\in\mathscr{F}, A\cap B=\varnothing$，则

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(2) 单调性，如 $A \supseteq B$，则 $\mu(A) \geqslant \mu(B)$；

(3) 减性，如 $A, B \in \mathscr{F}, A \supseteq B$，则

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B) \tag{3-12}$$

证明 因为 $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$，易得

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots = \mu(A) + \mu(B)$$

因为当 $A \supseteq B$ 时，$A = (A \backslash B) \cup B$，故 $\mu(A) = \mu(A \backslash B) + \mu(B)$，(3－12)式及单调性得证。 □

定理 3.8 设 $A_n \in \mathscr{F}, A_n \subseteq A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$，$\mu$ 为测度，则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \tag{3-13}$$

如果 μ 是有限测度，而 $A_n \supseteq A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$，则

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \tag{3-14}$$

证明 (1)因为集序列 A_n 单调上升，令 $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$，则 $B_n \cap B_m = \varnothing, m \neq n$

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

(2) 由(3－11)，(3－12)式

$$\begin{aligned}\mu(X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n^c) \\ &= \mu(X) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

于是，(3－14)式得证。 □

测度是定义在集合 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的，这样说来为了定义测度就必须对于每个 $\mathscr{F}$ 上的集合都要赋予一个值。这是难以做到的，因为一般来说，$\mathscr{F}$ 是一个无限集，更何况所赋予的值还必须满足测度的性质。下面的测度扩张定理指出，只要在一个能产生 $\mathscr{F}$ 的

较小的集族上定义测度就可以了。

设 $\mathscr{C}$ 为 X 的子集族，如果$\varnothing\in\mathscr{C}$，对有限交运算封闭(即如 $A,B\in\mathscr{C}$，则 $A\cap B\in\mathscr{C}$)，而且差集 $A\backslash B$ 可以表示为 $\mathscr{C}$ 中集合的有限不交并，即存在有限个互不相交的集合 $E_i\in\mathscr{C}$，使

$$A\backslash B = E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$$

则称 $\mathscr{C}$ 为半环。

例 3-2 $\overline{\mathscr{C}}=\{[a,b)\mid a,b\in\overline{\mathbf{R}}\}$是一个半环，$\overline{\mathscr{C}'}=\{(a,b]\mid a,b\in\overline{\mathbf{R}}\}$也是半环。由它们产生的 σ 代数是相同的，记为 $\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$.

证明 $\overline{\mathscr{C}},\overline{\mathscr{C}}'$为半环的证明是简单的，往证由它们产生的 σ 代数是相同的。

首先，对每个单点集

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n})$$

右端的每个集合属于$\overline{\mathscr{C}}$，从而每个单点集属于由它产生的 σ 代数 $\sigma(\overline{\mathscr{C}})$.

而

$$(a,b]=[a,b)\backslash\{a\}\cup\{b\}$$

因此，一切形如$(a,b]$的集合均属于 $\sigma(\overline{\mathscr{C}})$. 于是

$$\overline{\mathscr{C}}'\subseteq\sigma(\overline{\mathscr{C}})$$

所以，

$$\sigma(\overline{\mathscr{C}}')\subseteq\sigma(\overline{\mathscr{C}})$$

类似地，我们有

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},a]$$

而由

$$[a,b)=(a,b]\backslash\{b\}\cup\{a\}$$

可见，一切形如$[a,b)$的集合属于 $\sigma(\overline{\mathscr{C}}')$. 于是得到

$$\sigma(\overline{\mathscr{C}})\subseteq\sigma(\overline{\mathscr{C}}')$$

这就证明了由$\overline{\mathscr{C}}$与$\overline{\mathscr{C}}'$产生的σ代数是相同的。 □

其实,由上面的证明还可知由一切形如(a,b)的全体的集族,或一切形如$[a,b]$的全体的集族,也都产生同样的σ代数。这是一个非常重要的σ代数,我们称之为 Borel **σ代数**,并记为$\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$.

如果,我们取基本空间为$\mathbf{R}$,只要限定上面的a,b不取正负无穷大,类似地可得到σ代数$\mathscr{B}(\mathbf{R})=\sigma(\mathscr{C})$,也称作$\mathbf{R}$上 Borel **$\sigma$代数**,这里$\mathscr{C}=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$.

前面我们在σ代数上定义了测度,实际上我们也可以在半环上定义测度。因为半环对集合可列并的运算不封闭,所以需把定义3.2中把可列可加性改为:"设$E_n\in\mathscr{F}$,$n=1,2,\cdots$,$E_n\cap E_m=\varnothing$,$n\neq m$,如果$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{C}$,则(3-11)式成立。"

例 3-3 如果令

$$\mu([a,b)) = b - a$$

$$\mu((-\infty,b)) = \mu([a,\infty)) = \mu((-\infty,\infty)) = \infty$$

则μ就是半环$\mathscr{C}=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$上的测度。

例 3-4 设$X=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$,$\mathscr{F}=\mathscr{P}(X)$(也即$X$的一切子集),选取正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n = 1$$

并对X的任意子集A,令

$$\mu(A) = \sum_{\{i:\omega_i\in A\}}p_i$$

则易证μ是σ代数$\mathscr{F}$上的测度。

例 3-5 设$F(x)$是定义在$\overline{\mathbf{R}}$上非降的右连续函数,$F(+\infty)=1$,$F(-\infty)=0$,且对任意的x,$0\leqslant F(x)\leqslant 1$,对左开右闭区间$(a,b]$定义

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

则可证明它是半环$\overline{\mathscr{C}}=\{(a,b]\mid a,b\in\overline{\mathbf{R}}\}$上的测度。

一般地，测度可以取无限的值，但如果对任意的 $A\in\mathscr{D}$，存在 $A_n\in\mathscr{D}, n\geqslant 1$，使得对每个 n，有 $\mu(A_n)<\infty$，则称 μ 是 **σ 有限的测度**。

下面就是著名的称为 Caratheodory 测度扩张定理，遗憾的是我们在这里不能给出它的证明，因为这要牵涉到太多的东西。

"扩张"是在这样的意义下使用的：设 μ 在 $\mathscr{C}$ 上有定义，$\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F}$，如果我们能在 $\mathscr{F}$ 上定义 ν，而且对于任意的 $A\in\mathscr{C}$，$\nu(A)=\mu(A)$，则称 ν 为 μ 的**扩张**。为了简单，扩张后得到的测度仍记为 μ.

定理 3.9 设 $\mathscr{C}$ 为 X 上的半环，μ 为 $\mathscr{C}$ 上的测度，则 μ 可以扩张为 $\sigma(\mathscr{C})$ 上的测度。若 μ 在 $\mathscr{C}$ 上 σ 有限，且 X 可表示为 $\mathscr{C}$ 中集合的可列并，则这一扩张是唯一的，并且扩张所得的测度在 $\sigma(\mathscr{C})$ 上也是 σ 有限的。

根据这个定理，由例 3-3，我们就得到在 $\mathscr{B}(\mathbf{R})=\sigma(\mathscr{C})$ 上的测度，特别记这个测度为 m，称它为 **Lebesgue 测度**。

称按照例 3-5 所定义测度的扩张为 σ 代数 $\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$ 上的 **Lebesgue-Stieltjes 测度**，简称为 L-S 测度。

在下面的例 3-6 中我们看到，概率论中随机变量的分布函数 F 满足例 3-5，所以，由随机变量的分布函数就可定义出（或称为诱导出）$\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$上的 L-S 测度。

设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为一测度空间，$E\in\mathscr{F}$，且 $\mu(E)=0$. 按说，E 的子集也应该是一个测度为零的集合，但是从上面的定义，我们并不能保证 E 的子集属于 $\mathscr{F}$，也即这些子集的测度是否有定义还是一个问题，更谈不上它们的测度是否为零？一种完备化的方法解决了这个问题。

设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个测度空间，称测度 μ 是**完备的**，如果它的零测集的所有子集都属于 $\mathscr{F}$，显然这些子集的测度将都是 0. 当测度 μ 是完备测度时，就称这个测度空间为**完备测度空间**。对于一般的测度空间$(X,\mathscr{F},\mu)$，令

$$\mathscr{N}=\{E|\exists\ F\in\mathscr{F},\mu(F)=0\text{ 使 }E\subseteq F\}$$

它就是 X 上的零测集子集的全体。令

$$\overline{\mathscr{F}}=\{A\cup N|A\in\mathscr{F},N\in\mathscr{N}\}$$

对于$\overline{\mathscr{F}}$中的集合 $A\cup N$，定义

$$\overline{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$$

我们可以证明$(X,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$是一个完备的测度空间，并称它是$(X,\mathscr{F},\mu)$的**完备化**。这表明任意一个测度空间都可完备化为完备的测度空间。$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}),m)$的完备化是$(\mathbf{R}),\overline{\mathscr{B}}(\mathbf{R}),\overline{m})$，称$\overline{\mathscr{B}}(\mathbf{R})$中的集合为 Lebesgue **可测集**，$(\overline{\mathbf{R}}),\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}),m)$的完备化是$(\overline{\mathbf{R}},\overline{\mathscr{B}}(\overline{\mathbf{R}}),\overline{m})$.

因为测度空间总是可以完备化的，所以今后我们不妨假定所论的测度空间都是完备的测度空间。

给定一个基本集合 X，我们称之为空间，在第二章中我们可以在 X 上构造拓扑 $\mathscr{T}$，而在本章，我们又可给出 X 上的可测结构，或者说给出 X 上的子集 σ 代数，二者有什么关系呢？前者是为了给出拓扑结构，也即是为了刻划“邻域”，“接近”这类概念，最后达到刻划极限与连续；而可测结构是为了定义子集的测度，最终是为了定义某种积分。原则上，对于任意的集合，两种结构都可定义。但是，对于太一般的集合，引人拓扑并没有什么意义。例如，X 为一个抽象集合，虽然我们也可用它的全体子集构成它的拓扑，但这样，一切子集都将为开集。于是，定义在 X 上的任意函数都将是连续函数，显然这种拓扑不会有什么实际意义。

如果$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，也即 $\mathscr{T}$ 是 X 上的全体开集，它本身是一个集类，于是我们可令

$$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{T})$$

也即 $\mathscr{F}$ 为 X 上的拓扑(开集类)产生的 σ 代数，这样的可测空间，我们称为是拓扑可测空间。例如 $X=\overline{\mathbf{R}}$，我们可取 $\mathscr{T}=\{(a,b)|a,b\in\overline{\mathbf{R}}\}$，我们在例 3-5 已看到，$\sigma(\mathscr{T})$就是 Borel σ 代数，它与由全体

半开半闭区间产生的 σ 代数是相同的。

下面将要构造定义在 X 上的函数 f 对某个测度的积分，我们需要用 $\{x\in X\,|\,a\leqslant f(x)<b\}$ 型的集合代替黎曼积分中 $[x_i,x_{i+1}]$，为此要计算这种集合的测度。我们知道测度只是在 σ 代数上有定义，这就引出了可测函数的定义。

§3.3 可测函数

定义 3.3 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为一测度空间，$f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ 为一个映射，如果对任意的 $B\in\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$，有

$$f^{-1}(B)\in\mathscr{F} \tag{3-15}$$

则称 f 为**可测函数**。如果将这里的 $\overline{\mathbf{R}}$ 换为 $\mathbf{R}$，则称 f 为实值可测函数。

定理 3.10 f 为可测函数的充要条件是对于任意的 $a\in\overline{\mathbf{R}}$ 有

$$\{x\in X\,|\,f(x)<a\}\in\mathscr{F} \tag{3-16}$$

证明 必要性是显然的，因为 $(-\infty,a)\in\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$. 下面充分性的证明方法，我们称之为**通常方法**。先构造一个满足(3－15)式的集合族

$$\mathscr{D}=\{B\in\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})\,|\,f^{-1}(B)\in\mathscr{F}\}$$

由于(3－16)式成立，可见

$$\mathscr{D}\supseteq\overline{\mathscr{C}} \tag{3-17}$$

现在验证 $\mathscr{D}$ 是 $\overline{\mathbf{R}}$ 上的一个 σ 代数：

(1) $f^{-1}(\overline{\mathbf{R}})=X\in\mathscr{F}$，故 $\overline{\mathbf{R}}\in\mathscr{D}$；

(2) $\forall\ A\in\mathscr{D}$，则 $f^{-1}(A^c)=X\setminus f^{-1}(A)\in\mathscr{F}$，故 $\mathscr{D}$ 对取余的运算封闭；

(3) 设有 $A_n\in\mathscr{D}$，$n\geqslant 1$，则

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)\in\mathscr{F}$$

$\mathscr{D}$ 对可列并运算封闭，因此 $\mathscr{D}$ 是一个 σ 代数。由(3—17)式可得，$\mathscr{D}\supseteq\sigma(\overline{\mathscr{C}})$. 于是，$\mathscr{D}=\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$. 这就表明，对一切 $B\in\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$，$f^{-1}(B)\in\mathscr{F}$. □

如果 f 为可测函数，对任意的实数 a，因为 $\{x\in X\,|\,f(x)=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X\,|\,a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\}$，可见它是可测集。于是，$\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant a\}$，$\{x\in X\,|\,f(x)>a\}$都是可测集。

定理 3.11 设 f 为可测函数，c 为常数，则 $f+c$，cf，$|f|$，$\frac{1}{f}$ $(f\neq 0)$均为可测函数。

证明 从

$$\{x\,|\,f(x)+c<a\}=\{x\,|\,f(x)<a-c\}$$

$$\{x\,|\,cf(x)<a\}=\{x\,|\,f(x)<\frac{a}{c}\}\ (c>0)$$

$$\{x\,|\,cf(x)<a\}=\{x\,|\,f(x)<\frac{a}{c}\}\ (c<0)$$

$$\{x\,|\,|f(x)|<a\}=\{x\,|\,-a<f(x)<a\}$$

立得 $f+c$，cf，$|f|$的可测性。对于常数 $a>0$，

$$\{x\,|\,\frac{1}{f(x)}<a\}=\{x\,|\,f(x)>0,\text{且}\,f(x)>\frac{1}{a}\}\cup\{x\,|\,f(x)<0\}$$

当 $a<0$ 时，

$$\{x\,|\,\frac{1}{f(x)}<a\}=\{x\,|\,f(x)<0,\text{且}\,f(x)>\frac{1}{a}\}$$

而当 $a=0$ 时，

$$\{x\,|\,\frac{1}{f(x)}<0\}=\{x\,|\,f(x)<0\}$$

由此可得$\frac{1}{f}(f\neq 0)$的可测性。 □

定理 3.12 设 $f,g,f_n,n\geqslant 1$ 都是$(X,\mathscr{F})$上的可测函数，则

(1) fg 为可测函数；

(2) 若 $f+g$ 处处有意义，$f+g$ 为可测函数；

(3) 若 f/g 处处有意义，f/g 为可测函数；

(4) $\inf f_n, \sup f_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ 均为可测函数；

(5) $\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}, \{x\in X \mid f(x)\leqslant g(x)\}$ 为可测集。

证明 (1)首先假定 f,g 均非负可测，则对 $a>0$，

$$
\begin{aligned}
&\{x \in X \mid f(x)g(x) < a\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in X \mid g(x) = 0\} \\
&\quad \cup \left(\bigcup_{r\in Q_+} [f(x) < r] \cap \left[g(x) < \frac{a}{r}\right]\right) \in \mathscr{F}
\end{aligned}
$$

其中 Q_+ 表示非负有理数集，故 fg 为可测函数。对一般的可测函数 f,g，令

$$
f^+(x) = \max\{f(x),0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x),0\}
$$

分别称它们为函数 f 的**正部**，**负部**，顺便指出 $|f|=f^+ + f^-$. 显然，f^+,f^- 为可测函数，由于 $f=f^+ - f^-$，

$$
fg = (f^+ g^+ + f^- g^-) - (f^+ g^- + f^- g^+) \quad (3-18)
$$

注意到，对固定的 x，如果 $f(x)\geqslant 0$，则 $f^+(x)=f(x), f^-(x)=0$；如果 $f(x)<0$，则 $f^+(x)=0, f^-(x)=-f(x)$. 这表明(3－18)中不会发生 $+\infty-(+\infty)$ 这样没有意义的情形，从而 fg 是可测函数。

(2)这里所谓处处有意义是指不发生 $+\infty+(-\infty)$ 的情形。由

$$
\begin{aligned}
&\{x \mid f(x) + g(x) < a\} \\
&= \{x \mid f(x) < a - g(x)\} \\
&\quad \bigcup_{r\in Q} ([x \mid f(x) < r] \cap [x \mid g(x) < a - r])
\end{aligned}
$$

可知 $f+g$ 是可测函数。

(3)设 $|g|>0$ 处处成立，易知 $1/g$ 为可测函数，由

$$
\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}
$$

可知 f/g 为可测函数。

(4)由于

$$\{x \in X \mid \inf f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) < a\}$$

以及

$$\{x \mid \sup f_n(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \leqslant a\}$$

可知 $\inf f_n, \sup f_n$ 可测。而因为，

$$\underline{\lim} f_n = \sup_{n \geqslant 1} \inf_{m \geqslant n} f_m$$

$$\overline{\lim} f_n = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{m \geqslant n} f_m$$

因此都是可测函数。

(5)留给读者。 □

称测度空间$(X, \mathscr{F}, \mu)$上的两个可测函数 f, g **几乎处处相等**，并记为 $f=g\ a.e.$，是指

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

同样，称一个关于可测函数的命题**几乎处处成立**，是指该命题不成立的点所构成的集合的测度为 0. 这样下面叙述的意义是自明的：$f \geqslant g\ a.e.$；$f \geqslant 0\ a.e.$；$f \leqslant g\ a.e.$.

"收敛性"是一个不可缺少的概念，对于可测函数而言，有下面三种不同的收敛性。

定义 3.4 设 $f_n, f, n \geqslant 1$ 均为定义在测度空间$(X, \mathscr{F}, \mu)$上的可测函数，称 f_n **几乎处处收敛**到 f 是指

$$\mu(\{x \mid f_n(x) \text{ 不收敛到 } f(x)\}) = 0,$$

记为 $f_n \to f\ a.e.$.

称 f_n **依测度收敛到** f 是指，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0 \qquad (3-19)$$

并记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

例 3-6 设 Ω 是随机试验结果的全体，称之为样本空间，每个

随机试验的结果称为样本点。设$\mathscr{F}$为Ω上(子集)σ代数,$\mathscr{F}$中的集合称作事件。概率P就是定义在可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上满足$P(\Omega)=1$的测度,此时称测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间。一个定义在Ω上的实值函数ξ称为是随机变量是指它满足:对于任意的实数x,

$$\{\omega|\xi(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$$

因此,随机变量就是概率空间上的可测函数。设ξ_n,ξ,$n\geqslant 1$为随机变量,对于概率(它就是一种特殊的测度)而言的几乎处处收敛就是概率论中称之为以概率1的收敛,而依测度P的收敛,就是概率论中的依概率收敛。

在概率论中我们称

$$F(x)\triangleq P\{\omega|\xi(\omega)\leqslant x\} \tag{3-20}$$

为随机变量ξ的分布函数,它是右连续的非降函数,且$F(\infty)=1$,$F(-\infty)=0$. 对于每个随机变量都有一个分布函数,设ξ_n的分布函数为F_n,ξ的分布函数为F,如果对于分布函数的连续点x,有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x) \tag{3-21}$$

则称随机变量列ξ_n以分布收敛到ξ.

现在我们描绘一下随机变量列ξ_n以概率1收敛到随机变量ξ的意义。因为每个随机变量都是样本点ω的函数,固定一个ω,$\{\xi_n(\omega)\}$是一个数列,上述的以概率1收敛就是指使得$\xi_n(\omega)$收敛到$\xi(\omega)$成立的ω的集合具有概率(测度)1. 固定ω,$\xi_n(\omega)$收敛到$\xi(\omega)$就是指:对于一切自然数k,存在自然数N,当$n\geqslant N$时,

$$|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}$$

现在我们来证明:

$$\left\{\omega|\ \forall\ k\in\mathbf{N},\exists\ N\in\mathbf{N},\text{当}\ n\geqslant N\ \text{时},|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{\omega|\,|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}\right\} \tag{3-22}$$

也就是要证明(3－22)式两端的集合相互包含。显然"$\supseteq$"是成立的。往证"$\subseteq$". 如果 ω 不属于右端的集合，则表明存在 $k\in \mathbf{N}$，使得

$$\omega \notin \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}$$

换言之，$\omega \in \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$，亦即不论 N 有多大，总有相应的 $n\geqslant N$，使得 $|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\frac{1}{k}$. 这样便可找到一个子列 ξ_{n_i}，满足 $|\xi_{n_i}(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\frac{1}{k}$. 这样 ω 不属于左端的集合。这证明了(3－22)成立。从而，

$$\begin{aligned}1 &= P(\omega \mid \xi_n(\omega)\ \text{收敛到}\ \xi(\omega))\\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\right)\end{aligned}$$

上式也可表达为对任意的 $\varepsilon>0$，

$$P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0 \quad (3-23)$$

因为集合 $\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\}$ 随着 N 的增大而下降，故由定理 3.8，上式等价于

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0 \quad (3-24)$$

显然，

$$\begin{aligned}&P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{\omega \mid |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\}\right)\\ &\geqslant P(\{\omega \mid |\xi_N(\omega)-\xi(\omega)|\geqslant\varepsilon\})\end{aligned}$$

因此从以概率 1 收敛(即(3－24)式成立)可推出依概率收敛(即(3－19)成立)。

在概率论中我们还可证明依概率收敛可推出依分布收敛，在这里不予详细的论述。

设 $A\subseteq X$，称

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

为集合 A 的**示性函数**。如果 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n, n\in\mathbf{N}, A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $X=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 X 的**可测分割**。称

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}(x)$$

为**简单函数**，如果这些 a_i 均非负，则称 f 为**非负简单函数**。下面的定理给出了可测函数的结构。今后我们将看到，利用本定理，可测函数性质的研究往往可以简化为简单函数性质的研究。

定理 3.13

(1) 设 f 为定义在可测空间 $(X,\mathscr{F})$ 上的可测函数，则存在可测的简单函数列 $\{f_n\}$，使 $\forall\ n\in\mathbf{N}, |f_n|\leqslant|f|$，且

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f$$

(2) 如果 f 为非负可测函数，则存在非负可测简单函数的增序列 f_n，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$.

证明 因为 $f=f^+-f^-$，我们只要证(2). 令

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\{\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n}\}}(x)+nI_{\{f(x)\geqslant n\}}(x) \tag{3-25}$$

则 f_n 为非负可测简单函数的增序列，且 $f_n\uparrow f$. 事实上，如果 $f(x)<\infty$，则必存在充分大的 n，使 $f(x)<n$，对此 x，$f(x)$ 的值必落在某个 $[k/2^n,(k+1)/2^n]$ 中，于是 $|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{2^n}\to 0$；如果 $f(x)=+\infty$，则 $f_n(x)=n$，仍有 $f_n(x)\to f(x)$. □

§3.4 积　分

设 $\mathscr{S}$ 为测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的简单函数全体，$\mathscr{S}^+$ 为非负可测的简单函数全体，记 $\mathscr{M}$ 为可测函数全体，$\mathscr{M}^+$ 为非负可测函

数全体。现在开始定义积分，我们从非负简单函数开始。

定义 3.5 设 $f\in\mathscr{S}^+$，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{E_i}(x)$$

其中 $a_i\geqslant 0, E_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots$ 则定义 f **关于测度** μ **的积分为**

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i) \qquad (3-26)$$

并简记为 $\mu(f)$.

为了说明定义 3.5 的合理性，必须说明对于 $f(x)$ 的两种不同的表达

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{E_i}(x)=\sum_{j=1}^{m}b_jI_{F_j}(x)$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)=\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(F_j) \qquad (3-27)$$

注意到，

$$\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j=X$$

而当 $x\in E_i\cap F_j$ 时，$a_i=f(x)=b_j$。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)&=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}\mu(E_iF_j)\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_iF_j)\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_X f(x)I_{E_iF_j}(x)\mathrm{d}\mu\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_j\mu(E_iF_j)\\&=\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(F_j)\end{aligned}$$

(3－27)式得证。

定理 3.14 下面设 $f_n, g_n, f, g \in \mathscr{S}^+$，$n \geqslant 1$，则积分具有：

(1) 保序性，即设 $f, g \in \mathscr{S}^+$，$f \geqslant g$，则 $\mu(f) \geqslant \mu(g)$.

(2) 线性性，即设 a, b 为常数，使 $af + bg$ 以及 $a\mu(f) + b\mu(g)$ 有意义，则

$$\mu(af + bg) = a\mu(f) + b\mu(g)$$

(3) 设 $f_n \downarrow f$，$\mu(f_1) < \infty$，则 $\mu(f_n) \downarrow \mu(f)$.

(4) 设 $f_n \uparrow f$，则 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$.

(5) 设 $f_n \uparrow$，$g_n \uparrow$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(g_n)$$

其中 $\uparrow$，$\downarrow$ 分别表示单调上升，单调下降。

证明 (1)，(2)可直接由定义推得。(2)中所谓有意义是指不出现$\infty - \infty$的情况。

(3)令 $g_n = f_n - f \downarrow 0$，记

$$\beta = \sup\{g_1(x) \mid x \in X\}$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$，

$$0 \leqslant g_n \leqslant \beta I_{(g_n > \varepsilon)} + \varepsilon I_{(0 < g_n \leqslant \varepsilon)} \leqslant \beta I_{(g_n > \varepsilon)} + \varepsilon I_{(g_1 > 0)}$$

于是，

$$\mu(g_n) \leqslant \beta\mu(x \mid g_n(x) > \varepsilon) + \varepsilon\mu(x \mid g_1(x) > 0)$$

由于 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} (x \mid g_n(x) > \varepsilon) = \varnothing$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(x \mid g_n(x) > \varepsilon) = 0$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(g_n) \leqslant \varepsilon\mu(x \mid g_1(x) > 0)$$

$\varepsilon > 0$ 是任意的，所以(3)得证。

(4)若 $\mu(f) = \infty$，由于 f 是简单函数，必有 a，使 $\mu(x \mid f(x) = a) = \infty$. 因为

$$(x \mid f(x) \geqslant a/2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x \mid f_n(x) > a/2)$$

以及

$$f_n \geqslant \frac{a}{2} I_{(f_n(x) > \frac{a}{2})}$$

立得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2}\mu(x\,|\,f_n(x)>\frac{a}{2})$$
$$=\frac{a}{2}\mu(x\,|\,f(x)\geqslant\frac{a}{2})=\infty;$$

若 $\mu(f)<\infty$，则 $g_n=f_n-f\downarrow 0$，且 $\mu(g_1)<\infty$，由(3)则得(4).

(5)固定 m，令 $h_n=\min\{g_n,f_m\}$，则 $h_n\in\mathscr{S}^+$，$h_n\uparrow f_m\in\mathscr{S}^+$. 由(4)得$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(h_n)=\mu(f_m)$，而 $\mu(g_n)\geqslant\mu(h_n)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)\geqslant\mu(f_m)$$

再令 $m\to\infty$，(5)得证。 □

定义 3.6 设 f 是$(X,\mathscr{F},\mu)$上的非负可测函数，则由定理 3.13 存在一列非负可测的简单函数 $f_n\uparrow f$，我们定义 f 关于 μ 的积分为

$$\mu(f)\triangleq\int_X f(x)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)\qquad(3-28)$$

为了说明这个定义的合理性，必须证明上述极限的存在，且不依赖于 f_n 的选择。因为 f_n 单调上升，(3－28)式的极限或有限，或为$+\infty$. 而由定理 3.14(5)可见这个极限不依赖于序列 f_n 的选择。

注意到(3－25)式，

$$\mu(f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu\left(\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\right)$$
$$+n\mu(\{f(x)>n\})\qquad(3-29)$$

事实上，上述关于积分的定义就是先对 $f(x)$的值域进行分割，把值域分为 $f>n$ 与 $f\leqslant n$，然后把后者等分成 2^n 个区间，在每个区间上用左端点的值($k/2^n$)逼近函数值，这就定义了简单函数 $f_n(x)$，从而得到简单函数 f_n 的积分。容易看出，当分点增加时，即 n 增大时，$f_n(x)$单调非降。于是 $\mu(f_n)$单调非降，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)$或

等于$+\infty$，或为有限数。

读者应该看到，这里的积分与黎曼积分都有一个共同点，也就是分割求和，再求极限。两者最本质的区别是，前者是通过分割函数的值域得到对定义域的可测分割，后者是直接分割函数的定义域。

显然，如果$\mu(\{x\in X\mid f(x)=+\infty\})>0$，则$\mu(f)=+\infty$. 对于一般的可测函数积分的定义如下。

定义 3.7　设$f(x)$为定义在$(X,\mathscr{F},\mu)$上的可测函数，当$\mu(f^+)$，$\mu(f^-)$有一个有限时，称f的积分存在，并称

$$\mu(f)=\mu(f^+)-\mu(f^-) \tag{3-30}$$

为f的**积分**，而当$\mu(f^+)$，$\mu(f^-)$均有限时，即

$$\mu(|f|)=\mu(f^+)+\mu(f^-)<\infty$$

时，称f**可积**。

我们还需要定义在一个可测集A上的积分，定义

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=\mu(fI_A)$$

下面的定理是积分的基本性质。

定理 3.15　设f,g均为$(X,\mathscr{F},\mu)$上的积分存在的可测函数。

(1) 设a,b为实数，且使下面的式子有意义，则

$$\mu(af+bg)=a\mu(f)+b\mu(g)$$

(2) 设$f\leqslant g$ a.e. 则$\mu(f)\leqslant\mu(g)$；

(3) $|\mu(f)|\leqslant\mu(|f|)$.

这个定理的证明都可以直接从积分的定义得到，留给读者作为练习。

由定理3.15可知，当$f=g$, a.e.，则$\mu(f)=\mu(g)$. 在$\mathscr{M}$中引入关系R: $f\sim_R g$当且仅当$f=g$, a.e. 易知R是一个等价关系，也即它具有自反性，对称性，传递性。于是按此关系，可将$\mathscr{M}$分解成

不同的等价类，在每个等价类上积分 $\mu(f)$ 是不变的。在这个意义上，我们可以把几乎处处相等的可测函数看成是同一个函数。

下面是积分论中应用最广泛的定理。

引理 3.16 设 $f_n, f, n\geqslant 1$ 均是非负可测函数。

(1) 设 $f_n\leqslant f_{n+1}$, a. e. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a. e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n) = \mu(f)$$

(2) 设 $f_n\geqslant f_{n+1}$, a. e. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a. e.，又 $\mu(f_1)<\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$. a. e.

证明 因为在一个零测集上改变函数的值，并不改变积分，所以不妨假定上述条件都是处处成立的。

(1) 对每个 n，令 $f_{n,m}\in\mathscr{S}^+$，使 $f_{n,m}\uparrow f_n(m\to\infty)$. a. e. 令 $g_m=\max\{f_{i,m}\mid i=1,2,\cdots,m\}$，则 $g_m\in\mathscr{S}^+$, $g_m\uparrow f$，且 $g_m\leqslant f_m$, a. e. 于是，

$$\mu(f) = \lim_{m\to\infty}\mu(g_m)\leqslant\lim_{m\to\infty}\mu(f_m)$$

但恒有 $\mu(f)\geqslant\mu(f_m)$，故有 $\lim\limits_{m\to\infty}\mu(f_m)=\mu(f)$.

(2)留给读者。 □

定理 3.17 单调收敛定理 设 $f_n\in\mathscr{M}$, $n\geqslant 1$，又设每个 $\mu(f_n)$ 存在。

(1) 设 $f_n\uparrow f$ a. e. 若 $\mu(f_1)>-\infty$，则 $\mu(f)$ 存在，且 $\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$.

(2) 设 $f_n\downarrow f$ a. e. 若 $\mu(f_1)<\infty$，则 $\mu(f)$ 存在，且 $\mu(f_n)\downarrow\mu(f)$.

证明 (1)因为 $f_n^+\uparrow f^+$, $f_n^-\downarrow f^-$ a. e. 以及 $\mu(f^-)\leqslant\mu(f_1^-)<\infty$，故 $\mu(f)$ 存在，且 $\mu(f_n)\uparrow$，由引理 3.16 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

(2)的证明留给读者。 □

定理 3.18 Fatou 引理 设 $f_n\in\mathscr{M}$, $n\geqslant 1$，且每个 $\mu(f_n)$ 存在。

(1) 若 f_n 下有控制，即存在 $g\in\mathscr{M}$, $\mu(g)>-\infty$，使得 $f_n\geqslant g$,

$a.e.,n\geqslant 1$，则 $\mu(\varliminf_{n\to\infty} f_n)$存在，且

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu(f_n)$$

(2) 若 f_n 上有控制，即存在 $g\in\mathscr{M}$，$\mu(g)<\infty$，使得 $f_n\leqslant g$，$a.e.$，$n\geqslant 1$，则 $\mu(\varlimsup_{n\to\infty} f_n)$存在，且

$$\mu(\varlimsup_{n\to\infty} f_n) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu(f_n)$$

证明 只证(1)。令 $g_n=\inf_{k\geqslant n} f_k$，则 $g_n\uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n$，且 $g_1\geqslant g$，$a.e.$，于是，$\mu(g_1)\geqslant\mu(g)>-\infty$，由单调收敛定理，$\mu(\varliminf_{n\to\infty} f_n)$存在，且

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(g_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mu(f_n)$$

(2)的证明留给读者。 □

定理 3.19 Lebesgue 控制收敛定理 设 $f_n, f\in\mathscr{M}$，$n\geqslant 1$ 且 $f_n\to f$ $a.e.$，若 f_n 有可积控制，即存在非负可积函数 g，使 $|f_n|\leqslant g$，$a.e.$ $n\geqslant 1$ 则 f 可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n) = \mu(f)$$

证明 由于$|f|\leqslant g$，可见 f 可积。因为$\lim_{n\to\infty} f_n=f$，故$\varliminf_{n\to\infty} f_n=\varlimsup_{n\to\infty} f_n=f$. 于是，由 Fatou 引理，

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mu(f_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mu(f_n) \leqslant \mu(\varlimsup_{n\to\infty} f_n)$$

上式两边都是 $\mu(\lim_{n\to\infty} f_n)$，故上式的等号成立，定理得证。 □

注 3-1 如在上述定理中用 f_n 依测度收敛于 f 代替 $f_n\to f$ $a.e.$ 定理仍然成立，它的证明可以在任何一本实变函数论或测度论的书中找到。

注 3-2 如$(X,\mathscr{F},\mu)$是$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}),m)$，其中 m 为 Lebesgue 测度。f 为 $\mathbf{R}$ 上的可测函数，则上述定义的积分就是 Lebesgue 积分，并记为 $\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}m\left(\left\{x\,\middle|\,\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\right)$$

$$+ nm(x \mid f(x) > n) \qquad (3-31)$$

下面的定理说明,Lebesgue 积分确是 Riemann(黎曼)积分的推广。

定理 3.20　设 f 是定义在$[a,b]$上的函数,如果它是 Riemann 可积,则必 Lebesgue 可积,且

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这里(L),(R)是分别表示 Lebesgue,Riemann 两种积分。

证明　由定理 3.1 可知,f 有界。考虑$[a,b]$的分割:$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 用 m_i, M_i 分别表示 f 在区间$[x_{i-1},x_i]$上的下、上确界。令

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i I_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i I_{[x_{i-1},x_i]}(x)$$

对于 Lebesgue 测度空间$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}),m)$,每个区间都是 Lebesgue 可测集,因此它们都是 Lebesgue 可测函数,且$\varnothing_n \uparrow$,$\psi_n \downarrow$,令

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \underline{f}(x), \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = \overline{f}(x)$$

则$\overline{f}(x)$,$\underline{f}(x)$均是 Lebesgue 可测函数,且$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x)$. 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = (L)\int_{[a,b]}\phi_n(x)\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (L)\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_{[a,b]}\psi_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

上式左、右端恰是黎曼下、上和,令$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x\to 0$,则

$$(L)\int_{[a,b]}\overline{f}\mathrm{d}x = (L)\int_{[a,b]}\underline{f}\mathrm{d}x = (R)\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \qquad (3-32)$$

由此可知

$$m(\{x \in [a,b] \mid \overline{f}(x) \neq \underline{f}(x)\}) = 0 \qquad (3-33)$$

事实上,若(3－33)不成立,必存在 $n\in\mathbf{N}$,使在$[a,b]$中某个非零测

子集 A 上，$\overline{f}(x)-\underline{f}(x)>1/n$，从而

$$\int_{[a,b]}\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{n}\mu(A)>0$$

与(3－22)式矛盾。

这样 f 也就几乎处处与 Lebesgue 可测函数相等，$\overline{\mathscr{B}}(\mathbf{R})$ 是完备的 σ 代数，因此 f 为 Lebesgue 可测。所以，

$$(L)\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_{b}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

□

注 3-3 设 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的一个非降右连续函数，如可测空间 $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$ 上的测度是由 $\mu([a,b])=F(b)-F(a)$ 扩张得到的。对于 Lebesgue 可测函数 f，此时的积分 $\mu(f)$ 称为是 Lebesgue-Stieltjes 积分。

如果 F 如注 3-3，如同构造黎曼积分，我们也可定义所谓的 Riemann-Stieltjes 积分

$$(R-S)\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}F(x)=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

容易证明当 f 在$[a,b]$上连续时，上述极限存在，也即此时 f 对 F 的 Lebesgue-Stieltjes 积分存在。

完全类似于定理 3.15 可以证明，当 f 在$[a,b]$上对 F 的 Riemann-Stieltjes 可积时，f 对 F 也 Lebesgue-Stieltjes 可积，且二者的积分值相等。

控制收敛定理的意义将在下面的叙述中体会到。设在$[a,b]$上定义的函数项级数 $\sum_{i=1}^{n}u_n(x)$ 的每项 $u_n(x)$ 都连续，则和函数 $S(x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)$ 在$[a,b]$上是否可积呢？对于黎曼积分，我们知道，这要求级数具有一致收敛性，此时对 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ 有

$$\int_{\alpha}^{\beta}S(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_i(x)\mathrm{d}x$$

这就是积分与无穷求和交换的定理。但对于 Lebesgue 积分而言，我们只须要求每项有界可测，此时和函数 $S(x)$ 也将有界可测(?)，于是 $S(x)$ 为 Lebesgue 可积。由控制收敛定理，我们只要假定对级数的每个部分和 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ 存在可积的控制函数 $G(x)$，则积分与无穷求和便可交换次序。如果级数一致收敛，则和函数在 $[a,b]$ 上连续，那么就可以找到一个常数控制每个部分和(?)，所以由 Lebesgue 控制收敛定理很容易得到级数与积分交换的定理。

例 3-7 设 $f(x),\psi(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，并且对任意的 $x\in\mathbf{R},\psi(x)\geqslant 0$，令

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(u)\mathrm{d}u$$

且假定 $F(+\infty)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\mathrm{d}u=1$，则 $F(x)$ 是分布函数，且当 $(L)\int_{\mathbf{R}}|f(x)|\psi(x)\mathrm{d}x<\infty$ 时，有

$$(L-S)\int_{\mathbf{R}}f(x)\mathrm{d}F(x)=(L)\int_{\mathbf{R}}f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$
$$=(R)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

证明 对任意有限区间 $[a,b]$，考虑分割 T^n：

$$a=x_0^n<x_1^n<\cdots<x_{k_n}^n=b,$$

使当 $n\to\infty$ 时，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k_n}\Delta x_i\to 0$. 取 $x_j^n<\xi_j^n\leqslant x_{j+1}^n,1\leqslant j\leqslant k_n$，以及简单函数 $f_n(x)=\sum_{j=0}^{k_n-1}f(\xi_j^n)I_{(x_j^n,x_{j+1}^n)}(x)$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续是一致的，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 n 充分大时，

$$|f(x)-f(\xi_j^n)|<\varepsilon,x\in(x_j^n,x_{j+1}^n],1\leqslant j\leqslant k_n$$

由此可见，当 $n\to\infty$ 时，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

由 $f(x)$在$[a,b]$上的连续性，存在 $M>0$，使$|f(x)|<M$，于是得

$$|f_n(x)| < M + \varepsilon$$

由控制收敛定理，

$$\begin{aligned}(L-S)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}F(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n(x)\mathrm{d}F(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1} f(\xi_k^n)[F(x_{k+1}^n) - F(x_k^n)] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1} f(\xi_k^n)\psi(\eta_k^n)(x_{k+1}^n - x_k^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1} f(\xi_k^n)\psi(\xi_k^n)(x_{k+1}^n - x_k^n) \\ &= (L)\int_{[a,b]} f(x)\psi(x)\mathrm{d}x \\ &= (R)\int_b^a f(x)\psi(x)\mathrm{d}x \qquad (3-34)\end{aligned}$$

其中

$$F(x_{k+1}^n) - F(x_k^n) = \psi(\eta_k^n)(x_{k+1}^n - x_k^n), \eta_k^n \in (x_k^n, x_{k+1}^n),$$

来自于 Riemann 积分的中值定理。

由条件 $(L)\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\psi(x)\mathrm{d}x < \infty$，以及 $|f(x)|\psi(x)I_{[a,b]}(x) \uparrow |f(x)|\psi(x)(a\to-\infty, b\to\infty)$，可知(单调收敛定理)，

$$\begin{aligned}(L)\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\psi(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} (L)\int_{[a,b]} |f(x)|\psi(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} (L)\int_{[a,b]} |f(x)|\mathrm{d}F(x) \\ &= (L-S)\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

可见，$f(x)\psi(x)$Legesgue 可积，$f(x)$关于 $F(x)(L\text{-}S)$可积。最后应用 Lebesgue 控制收敛定理，在(3－34)中令 $a\to-\infty, b\to\infty$即得定理的结论。 □

最后，我们介绍积分的变量替换定理。

设$(X,\mathscr{F})$，$(Y,\mathscr{D})$为两个可测空间，称映射 $f:X\to Y$ 为**可测映射**，是指对于任意的 $B\in\mathscr{D}$，有 $f^{-1}(B)\in\mathscr{F}$.，显然，可测函数就是由 $X\to\mathbf{R}$ 的可测映射。

如果 μ 为$(X,\mathscr{F})$上的测度，则对于任意的 $B\in\mathscr{D}$，令

$$\nu(B)=\mu(f^{-1}(B))$$

则可证明 ν 是$(Y,\mathscr{D})$上的测度。事实上，我们只须证明可列可加性。为此设 $B_i\in\mathscr{D}$，$B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)$. 由于当 $i\neq j$ 时

$$f^{-1}(B_i)\cap f^{-1}(B_j)=\varnothing$$

我们有

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\mu(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n))=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(B_n))$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(f^{-1}(B_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(B_i)$$

我们称这个测度 ν 为由映射 f 在$(Y,\mathscr{D})$上的诱导测度，并记为 $\nu=\mu f^{-1}$.

现在令 g 是从$(Y,\mathscr{D})$到$(\overline{\mathbf{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$的可测函数。则 f 与 g 的复合 $g\circ f$ 便是从$(X,\mathscr{F})$到$(\overline{\mathbf{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$的可测函数。事实上，对于任意的 $A\in\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$，$(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))$. 因为 $g^{-1}(A)\in\mathscr{D}$，而 f 是 X 到 Y 的可测映射，所以 $f^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathscr{F}$. 这样，我们可以考虑两个积分：一个是 $g\circ f$ 对 μ 在 X 上的积分，一个是 g 对 $\nu=\mu f^{-1}$在 Y 上的积分。

定理 3.21　承上面的假设，则 g 关于 μf^{-1}的积分存在(可积)当且仅当 $g\circ f$ 关于 μ 的积分存在(相应地，可积)，且

$$\int_X g\circ f\,\mathrm{d}\mu=\int_Y g\,\mathrm{d}(\mu f^{-1})\qquad(3-35)$$

证明　下面的论证方法对于证明有关可测函数的命题都有普遍的意义。

(1) 当 g 为示性函数时，即 $g(y)=I_B(y)$，$B\in\mathscr{D}$，$g\circ f(x)=$

$I_B(f(x))$，(3－35)的左端为

$$\begin{aligned}\int_X I_B(f(x))\mathrm{d}\mu &= \mu(x|f(x)\in B)\\ &= \mu(f^{-1}(B))\\ &= \int_Y I_B(y)\mathrm{d}(\mu f^{-1})\end{aligned}$$

(3－35)式成立。

(2) 当 g 为非负可测简单函数时，由积分的线性性可知(3－35)成立。

(3) 当 g 为非负可测函数时，则存在非负可测简单函数列 g_n，使 $g_n\uparrow g$，于是由积分的单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\int_X g\circ f\ \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\circ f\ \mathrm{d}\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_Y g_n\ \mathrm{d}\mu f^{-1}\\ &= \int_Y g\ \mathrm{d}\mu f^{-1}\end{aligned}$$

得证。

(4) 当 g 为一般可测函数时，$g=g^+-g^-$，分别关于 f^+，f^-的(3－35)式是成立的，这说明 $g\circ f$ 对 μ 的积分存在(或可积)当且仅当 g 对 μf^{-1}的积分存在(相应地，可积)，再一次由积分的线性性，(3－35)式得证。 □

例 3-8 应用于概率论。由(3－20)所定义的分布函数即为 $P\xi^{-1}((-\infty,x))$，它就是由 F 产生的 Stieltjes 测度，我们仍然用 F 表示这个测度。如果 g 是$\overline{\mathbf{R}}$到 $\mathbf{R}$ 自身的可测映射，则 $g(\xi)$仍然是 Ω 到 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$的可测函数，也即随机变量。

我们称随机变量对概率测度的积分为这个随机变量的**数学期望**，并用 E 来表示。即

$$E\xi=\int_\Omega \xi\mathrm{d}P,\quad Eg(\xi)=\int_\Omega g(\xi)\mathrm{d}P$$

那么由定理 3.21，

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x) \qquad (3-36)$$

特别当 $g(x)=x$ 时,

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x) \qquad (3-37)$$

(3—37)式正是初等概率论中关于随机变量的数学期望的定义,而(3—36)则是计算随机变量函数的数学期望的重要公式。初等概率论直接用(3—37)定义数学期望,而并不指出随机变量的数学期望其实是随机变量对概率测度的积分,这是因为在学习概率论之前并没有学习一般的积分理论。

例 3-9 设 $A_k=\{\omega|X(\omega)=1/k\}$, $P(A_k)=k^2/2^{k+1}$, $k\geqslant1$,并且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega$,试求: $\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{d}F(x)$,其中 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数,即 $F(x)=P(\omega|X(\omega)\leqslant x)$.

解 由积分转换原理

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{d}F(x)=\int_{\Omega}X^2\mathrm{d}P=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k}X^2\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}P(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

□

例 3-10 设 $-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty$,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \sum\limits_{i=1}^{k}p_i, & x_k\leqslant x<x_{k+1}\\ 1, & x\geqslant x_n\end{cases}$$

其中 $p_i\geqslant0$, $i=1,2,\cdots,n$,且 $\sum\limits_{i=1}^{k}p_i=1$. 对可测函数 $g(x)$,试求

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x),$$

解 由于

$$\mathbf{R}=(-\infty,x_1)\cup\{x_1\}\cup(x_1,x_2)\cup\{x_2\}\cup(x_2,x_3)$$
$$\cup\cdots\cup\{x_{n-1}\}\cup(x_{n-1},x_n)\cup[x_n,+\infty)$$

易知,若$F(x)$在某区间为常数,则$g(x)$在这区间对$F(x)$的积分为0. 故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x)&=\int_{(-\infty,x_1)}g(x)\mathrm{d}F(x)+\int_{\{x_1\}}g(x)\mathrm{d}F(x)\\&+\cdots+\int_{(x_k,x_{k+1})}g(x)\mathrm{d}F(x)+\int_{\{x_{k+1}\}}g(x)\mathrm{d}F(x)\\&+\cdots+\int_{(x_n,+\infty)}g(x)\mathrm{d}F(x)\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\{x_k\}}g(x)\mathrm{d}F(x)\\&=\sum_{k=1}^{n}g(x_k)[F(x_k)-F(x_k-0)]\\&=\sum_{k=1}^{n}g(x_k)p_k.\end{aligned}$$

□

习题三

1. 设$\mathscr{F}$为X上的σ代数,试证$\mathscr{F}$对集合的交运算,差运算封闭。

2. 设$X=\boldsymbol{R}$,验证由全体开区间,或由全体左开右闭区间,或由全体$\{(-\infty,a)\,|\,a\in\mathbf{R}\}$组成的集族都不是$\sigma$代数,但由它们产生的$\sigma$代数是一致的(记为$\mathscr{B}(\mathbf{R})$).

3. 设$\{A_n\}$为Ω子集的一个序列,称

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega\in\Omega\,|\,\omega\text{ 属于无限多个 }A_n\}$$

为上极限集；

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ 属于除了有限个 } A_n \text{ 外的一切 } A_k\}$$

为下极限集。试证：

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

如果 A_n 单调上升或单调下降，试证 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$，并求出它们的表达式。（此时记上述极限为 $\lim_{n\to\infty} A_n$，称为是集合序列的极限。）

4. 设 $\mathscr{C}$ 是空间 Ω 的非空子集族，$A \subseteq \Omega$，令

$$\mathscr{C} \cap A = \{B \cap A | B \in \mathscr{C}\}$$

试证：

$$A \cap \sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C} \cap A)$$

5. 设 $\mu: \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbf{R}_+$，$\mu(\varnothing)=0$，具有单调性，即如 $A \subseteq B$，则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$，且满足次可列可加性：

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

则称为是 Ω 上的**外测度**。令

$$\mathscr{U} = \{A \subseteq \Omega | \forall\ D \subseteq \Omega, \text{有 } \mu(D) = \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D)\}$$

试证 $\mathscr{U}$ 为 σ 代数，且 μ 在 $\mathscr{U}$ 上的限制为一测度。

6. 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的集族，且 $\varnothing \in \mathscr{C}$，$\mu$ 为 $\mathscr{C}$ 上的测度，令

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) | A_i \in \mathscr{C}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}, A \subseteq \Omega$$

（约定 $inf\varnothing = +\infty$），试证 μ^* 为 Ω 上的外测度，且在 $\mathscr{C}$ 上与 μ 一致。我们称 μ^* 为由 μ 引出的外测度。

7. 若外测度 μ^* 在半环 $\mathscr{C}$ 上有限可加，则 μ^* 是 $\mathscr{C}$ 上的测度。

8. 设 $\mathscr{C}$ 为半环，μ_1、μ_2 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 上的两个有限测度，若 $\Omega \in \mathscr{C}$，且 μ_1，μ_2 在 $\mathscr{C}$ 上的限制一致，则它们在 $\sigma(\mathscr{C})$ 上一致。

9. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ 为一个有限测度空间，$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$. 试证若 A

$\in \mathscr{F}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $B\in\mathscr{C}$，使得 $\mu(A\Delta B)<\varepsilon$，其中 $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$，称为是对称差。

10. 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个测度空间，令

$$\overline{\mathscr{F}}=\{A\cup N \mid A\in\mathscr{F},N\in\mathscr{N}\}$$

对于$\overline{\mathscr{F}}$中的集合 $A\cup N$，定义

$$\bar{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$$

试证$(X,\overline{\mathscr{F}},\bar{\mu})$是完备测度空间。

11. 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是测度空间，且 $A_n\in\mathscr{F}$，$n\geqslant1$，试证：

(1) $\mu(\varliminf_{n\to\infty}A_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu(A_n)$；

(2) 若 μ 有限，则$\varlimsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)$；

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$，则 $\mu(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)=0$.

12. 设 X 是有限集，$\mathscr{F}=\mathscr{P}(X)$，并对任意的 $A\in\mathscr{F}$，令 $\mu(A)=A$ 所含的元素的个数，试证：$(X,\mathscr{F},\mu)$是测度空间。（这个测度称为是计数测度。）

13. 设正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i<\infty$，分布函数 $F(x)$ 只在 $x=n(n\geqslant1)$ 上有跳跃值为 a_n 的阶梯形函数，试求 F 对应的 L-S 测度。

14. 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 到$\overline{\mathbf{R}}$的一族函数，令

$$\mathscr{F}=\sigma\{\bigcup_{f\in\mathscr{H}}f^{-1}(\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))\}$$

试证 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ 代数，并且是使得 $\mathscr{H}$ 中的函数可测的最小 σ 代数。

15. 试证示性函数有下列性质：

(1) $I_{AB}=I_AI_B$；$I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_{AB}$；若$\{A_n\}$为不交的集合列，则 $I_{\cup A_n}=\sum I_{A_n}$.

(2) $I_{\varlimsup_{n\to\infty}A_n}=\varlimsup_{n\to\infty}I_{A_n}$；$I_{\varliminf_{n\to\infty}A_n}=\varliminf_{n\to\infty}I_{A_n}$.

(3) $I_{A\backslash B}=I_A(1-I_B)$.

16. 试证：对$(\Omega,\mathscr{F})$上的任一非负有界可测函数X，必存在一个非负简单函数列$\{X_n|n\geqslant 1\}$，使得$X_n\uparrow X$对$\omega\in\Omega$一致成立。

17. 设可测函数列$\{X_n\}$中的任意子列中总存在一个子列依测度收敛到X，试证：X_n依测度收敛到X.

18. 设$X_n\xrightarrow{\mu}X$，且$Y_n\xrightarrow{\mu}Y$，试证：

(1) $aX_n+bY_n\xrightarrow{\mu}aX+bY,(a,b\in\mathbf{R})$

(2) $|X_n|\xrightarrow{\mu}|X|$.

19. 若$X_n\xrightarrow{a.e.}X$，且$X_n\xrightarrow{a.e.}Y$，则$X=Y,a.e.$

20. 若测度空间$(X,\mathscr{F},\mu)$上的可测函数列$X_n\xrightarrow{a.e.}X$，则X是$a.e.$可测的，当测度空间完备时，则X还是可测的。

21. 设f,g的积分存在，且对一切$A\in\mathscr{F}$，都有

$$\int_A f\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A g\mathrm{d}\mu$$

试证$f\leqslant g\ a.e.$.

22. 补足定理3.17,3.18的证明。

23. 试证定理3.20中的$f(x)$在x处连续当且仅当$\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$. 并将这与定理3.3比较。

24. 设$\mu(f)$存在，则对任意的$A\in\mathscr{F},\mu(A)=0$，则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}\mu=0$$

25. 设f为可测函数，试证：

(1) f可积$\Leftrightarrow|f|$可积，且此时$f(x)a.e.$有限。

(2) 若g可积，且$|f|\leqslant g,a.e.$，则f可积。

26. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为有限测度空间，$X_t(\omega),t\in\mathbf{R}$为一族可测函数，对一切$t\neq t_0,t_0-\delta<t<t_0+\delta,\delta>0$

$$\left|\frac{X_t-X_{t_0}}{t-t_0}\right|\leqslant Y,$$

若 Y 可积，且 $\mathrm{d}X_t/\mathrm{d}t$ 在 $t=t_0$ 处 $a.e.$ 存在，试证：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}X_t\mathrm{d}\mu\right)\bigg|_{t=t_0}=\int_{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\right)\bigg|_{t=t_0}\mathrm{d}\mu$$

第四章　各种形式的黎曼积分与一致收敛性

在高等数学中大家已经学过二重、三重积分，第一类曲线、曲面积分，这里我们给出这些积分的统一的叙述，这样可进一步理解积分的本质，并且与第三章的一般积分联系起来。

我们先来重述黎曼积分的定义：设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，或者说它是定义在线段 $[a,b]$ 上的函数。在 $[a,b]$ 上插入 n 个点，或者说将线段 $[a,b]$ 分为 n 个子线段得到：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

在每个子线段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取点 ξ_i，作积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 就是子线段的长度。如果这个和式不论分点怎样选取，也不论 ξ_i 如何选择，只要 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ 趋于零时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 趋于同一个极限，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，积分就等于 $\lim\limits_{\substack{\max\Delta i\to 0\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限值。从上述我们看到，积分就是被积函数的值乘以子区间的长度之和的极限。直线段是一种几何形体，我们容易将它推广到其它几何形体的情形。

§4.1 各类黎曼积分的统一定义

设 Ω 为任意的几何形体它或者是直线段，或者是曲线段，或者是一块平面图形，或者是一块曲面、一块空间区域，我们假定 Ω 是可以度量的，也即可以求长度，或者可以求面积、体积的。在 Ω 上定义了一个函数 $f(M)$，$M\in\Omega$. 将这个几何形体分割为若干个仍然可以求度量的小块 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$，我们把它们的度量仍记为 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$，令

$$d=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta\Omega_i$$

在每块 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 M_i 作积分和式（也称黎曼和）

$$\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$$

如果这个和式不论 Ω 怎样分割，也不论 M_i 在 $\Delta\Omega$ 上如何选取，只要 d 趋于零都有相同的极限 I，则称这个极限为 f(M)在 Ω 上的黎曼积分，记为

$$\int_{\Omega}f(M)\mathrm{d}\Omega\triangleq\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$$

(1)如果 Ω 是坐标平面上的一块可求面积的区域 (σ)，那么在 (σ) 上的积分就是二重积分，特别记为

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2)如果 Ω 是一块可以求体积的空间区域 (V)，那么在 (V) 上的积分就是三重积分，特别记为

$$\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(3)如果 Ω 是空间上可求长的曲线段 (l)，那么在 (l) 上的积

分就是第一类曲线积分，特别记为

$$\int_{(l)} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

(4)如果 Ω 是一个可求面积的曲面片 (S)，那么在 (S) 上的积分就是第一类曲面积分，特别记为

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

特别当取 $f(M)\equiv 1$ 时，

$$\int_{\Omega} f(M)\mathrm{d}\Omega = \sum_{i=1}^{n}\Delta\Omega_i = \Omega \text{ 的度量}$$

我们可以如 § 3.1引入达布上和、达布下和，首先看出黎曼可积的函数必须有界。设 $f(M)$ 为定义在几何形体 Ω 上的有界函数，记

$$M_i = \sup_{M\in\Delta\Omega_i} f(M),\quad m_i = \inf_{M\in\Delta\Omega_i} f(M)$$

称

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\Omega_i$$

为达布上和，称

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\Omega_i$$

为达布下和。与定积分的情形类似，我们有：

(1)一切黎曼和都介于达布上和与达布下和之间。

(2)如果在一种分割中增添新的分割构成更细的分割，则达布上和不增，达布下和不减。

(3) $m\cdot(\Omega$ 的度量$)\leqslant s\leqslant S\leqslant M\cdot(\Omega$ 的度量$)$。这里 M,m 分别为函数 $f(M)$ 在 Ω 上的上、下确界。

因此，达布上、下和对于分割而言分别存在上、下确界，即有

$$\lim_{d\to 0} S = L,\quad \lim_{d\to 0} s = l$$

从而在几何形体 Ω 上定义的有界函数 $f(M)$ 黎曼可积的充要条

件是：

$$L = l$$

如记 $\omega_i = M_i - m_i$ 则 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件也可写成：

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\Omega_i = 0$$

在几何形体 Ω 上的积分具有下面的性质：

(1)线性性：设 $f(M), g(M)$ 均为黎曼可积函数，a, b 为常数，则

$$\int_\Omega (af(M) + bg(M))\mathrm{d}\Omega = a\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega + b\int_\Omega g(M)\mathrm{d}\Omega$$

(2)设 $f(M)$ 在 Ω 上可积，$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$，且二者皆可度量，则

$$\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)\mathrm{d}\Omega$$

(3)保序性：设 $g(M) \leqslant f(M)$，二者在 Ω 上皆可积，则

$$\int_\Omega g(M)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega$$

(4)设 $f(M)$ 在 Ω 上可积，则 $|f(M)|$ 也在 Ω 上可积，且

$$\left|\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_\Omega |f(M)|\mathrm{d}\Omega$$

但反之不然，见习题4.

(5)第一中值定理：若 $f(M)$ 在 Ω 上可积，则存在常数 c 使得

$$\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega = c \cdot (\Omega \text{ 的度量})$$

如果 $f(M)$ 在 Ω 上连续，则至少存在 $M^* \in \Omega$，使得

$$\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega = f(M^*) \cdot (\Omega \text{ 的度量})$$

事实上，几何形体 Ω 可以看成为§3.2中的集合 X，度量就是定义在 Ω 的一切可度量子集上的测度，因此这里的黎曼积分实质

上是一般积分理论的特例。详细的论述必须牵涉更复杂的内容，这里就不展开了。至于第二类曲线积分、曲面积分在高等数学中已有详细的介绍，如果能进一步学习流形上的微积分，就可将它们统一起来。在那里一个斯托克司(Stokes)公式就将牛顿一莱布尼茨公式，格林公式，高斯一奥斯托洛夫斯基公式统一起来，这种统一性就是对积分本质的更深入的揭露。

§4.2 一致收敛性

一致收敛性是数学分析中比较深刻，而且很有用的概念。

现在考虑一个函数序列 $\{S_n(x)|n=1,2,\cdots\}$，序列的每项都是定义在某区间 I 上的函数，那么当 x 固定时，$\{s_n(x)\}$ 就是一个普通的数列。如果对于每个 x 它都是一个 Cauchy 列，则存在极限 $S(x)$. 因为这个极限是对每个 x 而言的，所以按极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言，这就是：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N=N(x,\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

当然，这里的 $N=N(x,\varepsilon)$ 不但与 ε 有关，我们更要强调的是，这里的 N 还依赖于 x，亦即对于不同的 x，一般地 $N(x,\varepsilon)$ 并不相同。

例4－1 设 $S_n(x)=x^n$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

首先容易看出当 $x=1$ 时，极限函数 $S(x)=1$，而当 $0\leqslant x<1$ 时极限函数为0. 对于 $0\leqslant x<1$，对任给的 $\varepsilon>0$，为使 $|S_n(x)-0|=x^n<\varepsilon$，必须 $n>\log\varepsilon/\log x$，因此可取 $N(x)=[\log\varepsilon/\log x]+1$. x 愈接近 1，则 $N(x)$ 就愈大(见图 4－1)。而且我们看到每个 $S_n(x)$ 为连续函数，但极限函数 $S(x)$ 却在 $x=1$ 处不连续。这个事实引起了人们的兴趣。

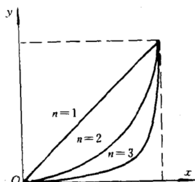


图4－1

§4.2.1 一致收敛性的定义

定义4.1 设 $\{S_n(x)|n=1,2,\cdots\}$ 为一个定义在区间(有限或无穷)I 上的函数序列，如果存在定义在 I 上的函数 $S(x)$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N=N(\varepsilon)$(不依赖于 x)，当 $n>N$ 时，成立

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

则称序列 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛到极限函数 $S(x)$.

例4－2 设

$$S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad x\in(-\infty,\infty)$$

显然极限函数 $S(x)=0$，因为

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n}$$

因此，只要取 $N(\varepsilon)=[1/2\varepsilon]$，则当 $n>N(\varepsilon)$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

这个函数的图形为图4－2，由图可知，只要 N 相当大，从第 N 项之后，每一条曲线 $y=S_n(x)$ 都位于 $y=S(x)+\varepsilon$ 和 $y=S(x)-\varepsilon$ 之间。

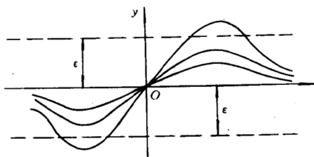


图4—2

由一致收敛的定义直接可得

定理4.1 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0$$

其中 $\Delta_n \triangleq \sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x)|$.

证明留给读者。

例4—3

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x\in[0,1]$$

显然 $S(x)=0$，而

$$\Delta_n = \sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)| = \left|S_n(\frac{1}{2})\right| = \frac{1}{2}$$

不收敛到0，故序列 $\{S_n(x)\}$ 不一致收敛到 $S(x)=0$. □

例4—4 对于例4—1的函数列，因为

$$|S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} x^n, & 当\ 0\leqslant x<1, \\ 0, & 当\ x=1, \end{cases}$$

故 $\Delta_n \triangleq \sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|\equiv 1$，因此 $\{x^n\}$ 在$[0,1]$上不一致收敛，而且在开区间$(0,1)$上也不一致收敛。但是，如取 c 为小于1的任何正数，因为

$$\Delta_n = \sup_{x\in[0,c]}|S_n(x) - S(x)| = \sup_{0\leqslant x\leqslant c} x^n = c^n \to 0\ (当\ n\to\infty)$$

因而,序列$\{x^n\}$在$[0,c]$上一致收敛。这是不难理解的,因为定义在$[0,1]$上的函数$\{x^n\}$一致收敛性的破坏发生在1的左邻域,因此当用c隔开之后,在$[0,c]$上序列便一致收敛。由此可见,一致收敛性与函数列的定义域密切相关。如果函数列$\{A_n(x)\}$在某一区间I上一致收敛,当然在I的子区间上一致收敛,但在包含I较大的区间上就未必一致收敛,如上面的例子$\{x^n\}$在$[0,c]$上一致收敛但在$[0,1)$上并不一致收敛。 □

设函数序列$\{S_n(x)\}$在(a,b)的任意闭子区间上一致收敛,则称它在(a,b)上内闭一致收敛。显然如果$S_n(x)$在(a,b)上一致收敛则必内闭一致收敛,反之则不然。但是,由(a,b)上的内闭一致收敛,可推出它必在(a,b)上处处收敛。事实上,对任给的一点$x_0 \in (a,b)$,存在一个(a,b)的闭子区间$[c,d]$包含x_0,因为序列在$[c,d]$上一致收敛,故必在x_0上收敛。

类似数列收敛的 Cauchy 原理,我们有关于一致收敛的 Cauchy 原理:

定理4.2 函数列$\{S_n(x)\}$在I上一致收敛的充要条件是:对任给的$\varepsilon>0$,存在自然数$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$时,对任意的自然数p及任意的$x\in I$有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \qquad (4-1)$$

证明 必要性:设$S_n(x)$一致收敛到$S(x)$,则对任意的$\varepsilon>0$,存在$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$时,对一切$x\in I$,成立

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此,对一切$p=1,2,\cdots$,

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而得到(4-1)式。

充分性:设对任意的$\varepsilon>0$,存在$N=N(\varepsilon)$,使得(4-1)式成

立。于是由 Cauchy 原理，对每个固定的 $x\in I$，数列 $S_n(x)$ 存在极限 $S(x)$。在(4－1)式中固定 n 令 $p\to\infty$，则得当 $n>N$ 时，对一切 $x\in I$ 都有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

这表明 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛到 $S(x)$。 □

众所周知，级数的收敛性就是级数部分和序列的收敛性，这就自然引出级数一致收敛性的问题。

定义4.2 设有定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，记它的部分和函数列为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_n(x)$$

如果函数列 $S_n(x)$ 一致收敛到函数 $S(x)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，并称 $S(x)$ 为该级数的和函数，写

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

记 $r_n(x)\triangleq\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_n(x)=S(x)-S_n(x)$，称之为级数的余和，由定理 4.1 可见，级数的一致收敛等价于 $\Delta_n=\sup\limits_{x\in I}|r_n(x)|$ 当 $n\to\infty$ 时趋于 0.

例如：$a_1(x)=x,a_n(x)=x^n-x^{n-1},n\geqslant 2$，则它的部分和 $S_n(x)=x^n$ 正是例4－1所给出的函数列。

由定理4.2，我们得到级数一致收敛的 Cauchy 原理为：

定理4.3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 一致收敛当且仅当对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in I$ 以及任意的自然数 $p=1,2,\cdots$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_n(x)\right|<\varepsilon \qquad (4-2)$$

按照定义来判别级数的一致收敛性常常是不方便的，这就引出所谓一致收敛判别法的研究。

定理4.4 Weierstrass(维尔斯脱拉斯)判别法 若对充分大的 n，恒有实数 c_n，使得对任意的 $x\in I$，成立 $|a_n(x)|\leqslant c_n$，而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

证明 由 $\sum_{k=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，

$$|c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+p}|<\varepsilon,\quad p=1,2,\cdots$$

但对一切 $x\in I$ 有

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|\\ \leqslant\ &|a_{n+1}(x)|+\cdots+|a_{n+p}(x)|\\ \leqslant\ &c_{n+1}+\cdots+c_{n+p}\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

因此由 Cauchy 一致收敛原理即得证。 □

从上面的证明看出，由维尔斯脱拉斯(今后简称为维氏)判别法得到了 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 是一致收敛的，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 为**绝对收敛**。

例4－5 设 $\sum a_n$ 绝对收敛，则 $\sum a_n\sin x$，$\sum a_n\cos x$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛且一致收敛。

证明 事实上，

$$|a_n\sin x|\leqslant|a_n|,\quad |a_n\cos x|\leqslant|a_n|$$

由维氏判别法即得。 □

引理4.5阿贝尔求和法 设 $S=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$，如记 $S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$，$k=1,2,\cdots,n$，则有

$$S=S_nb_n-\sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_{i+1}-b_i)$$

证明

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + (S_3 - S_2) b_3 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n \\
&= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n \\
&= S_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_{i+1} - b_i)
\end{aligned}
$$

□

读者注意这与积分论中分部积分公式十分相似，不过这里用求和代替积分，用差分代替微分，这决不是偶然的。如果恰当地定义一个函数，并且在集合$\{1,2,\cdots,n\}$上定义测度就可以把阿贝尔求和公式变为分部积分公式。

定理4.6　Abei(阿贝尔)判别法　如果

(1)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛；

(2)对每个固定的 $x\in I$，$b_n(x)$随 n 而单调，且 $b_n(x)$在 I 上一致有界，即存在实数 L 使对一切的 $x\in I$，一切的自然数 n，有 $|b_n(x)|\leqslant L$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

证明　由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的一致收敛性，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，

$$
|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon
$$

由阿贝尔求和法，

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{n+1}^{n+p} a_n(x) b_n(x) \right| \\
&= \left| S_{n+p}(x) b_{n+p}(x) - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} S_i(x)(b_{i+1}(x) - b_i(x)) \right|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \varepsilon(|b_{n+p}(x)| + |b_{i+1}(x) - b_i(x)|) \leqslant 3L\varepsilon$$
$$(n > N, p = 1, 2, \cdots)$$

因此由 Cauchy 一致收敛原理知所给的函数项级数一致收敛。□

利用阿贝尔求和法，读者还可证明下面的判别法。

定理4.7 Dirichlet（狄利克来判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的部分和

$$S_n(x) \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i(x)$$

在区间 I 上一致有界，对每个 $x \in I$，$b_n(x)$随 n 单调，且一致收敛到 0，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

例4－6 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在[0,1]上一致收敛。

证明 记 $b_n(x) = x^n$，随 n 单调，且对 $x \in [0,1]$，以及任意的自然数 n，$|b_n(x)| \leqslant 1$. 由阿贝尔判别法即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 一致收敛。□

例4－7 设$\{a_n\}$单调趋于零，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$[\delta, 2\pi - \delta]$上一致收敛，这里 δ 是小于 π 的任一正数。

证明 事实上，当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$时，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\delta}$$

满足狄利克来判别法的条件，故所给的函数项级数在$[\delta, 2\pi - \delta]$上一致收敛。□

§4.2.2 一致收敛级数的性质

一致收敛级数的性质，本质上是一个极限运算交换次序的问

题。我们先从函数列开始。

定理4.8 设在 a 的某邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 内(可以去掉点 a)函数列 $S_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$,又对每个 n,极限

$$\lim_{x\to a}S_n(x)=A_n$$

存在,则

$$\lim_{n\to\infty}A_n,\ \text{及}\lim_{x\to a}S(x)$$

都存在且相等,即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}S_n(x)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}S_n(x) \qquad (4-3)$$

这说明极限号 $\lim\limits_{x\to a}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 可以交换次序。

证明 由一致收敛的 Cauchy 原理,对任意的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in(a-\delta,a+\delta)$,有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,\ p=1,2,\cdots$$

在上式中令 $x\to a$,得到

$$|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$$

因之,数列 $\{A_n\}$ 收敛,记其极限为 A. 由数列极限与一致收敛的定义,对任给的 $\varepsilon>0$,存在一个公共的 N,使得

$$|A_N-A|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{和}\ |S_N(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\ (0<|x-a|<\delta)$$

同时成立。固定此 N,由 $\lim\limits_{x\to a}S_N(x)=A_N$,存在 $0<\eta\leqslant\delta$,使 $0<|x-a|<\eta$ 时

$$|S_N(x)-A_N|<\frac{\varepsilon}{3}$$

因此当 $0<|x-a|<\eta$ 时,

$$\begin{aligned}&|S(x)-A|\\ \leqslant\ &|S(x)-S_N(x)|+|N_N(x)-A_N|+|A_N-A|<\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to a}S(x)=A$. □

由定理4.8可直接得到下面关于连续函数列的一致收敛的极

限函数仍然连续的重要结论。

定理4.9　设函数列 $S_n(x)$ 的每一项在$[a,b]$上连续，且 $S_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，则极限函数 $S(x)$ 在$[a,b]$上仍然连续。

注意：一致收敛性只是保证连续函数列的极限函数连续的充分条件并非必要。例如 $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 不一致收敛到极限 $S(x)\equiv 0$，而后者显然连续。但是从例4－1看出，这个条件对于保证定理的成立又是不可少的。

定理4.10　设$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到 $S(x)$，$a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，而 $S_n(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta S_n(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta S(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x \quad (4-4)$$

亦即极限号与积分号可以交换。并且由不定积分定义的函数列 $\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t$ 一致收敛到 $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$.

证明　由一致收敛性，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

由于 $S_n(x)$ 连续，因而 $S(x)$ 连续，故它们都可积，并且

$$\left|\int_\alpha^\beta S_n(x)\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta S(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\alpha^\beta\left|S_n(x)-S(x)\right|\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a)$$

将上述的 β 换为 x，则得不定积分列的一致收敛性。　□

仍然要指出一致收敛性只是充分条件并非必要。例如 $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$，它的极限为0，收敛不一致，但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)\right]\Bigg|_0^1=0$$

读者可从例子 $S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$ 验证一致收敛的条件对于保证定理的成立是不可少的。

定理4.11　若在$[a,b]$上$\{S_n(x)\}$的每一项都有连续的导数，

$S_n(x)$收敛到$S(x)$，又导函数序列$\{S_n'(x)\}$一致收敛到$\sigma(x)$，则

$$S'(x) = \sigma(x)$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x) \qquad (4-5)$$

且此时$S_n(x)$在$[a,b]$上也是一致收敛的。

证明 由于$S'(x)$一致收敛到$\sigma(x)$，故后者连续。取$\alpha > a$，由定理4.9，

$$\begin{aligned}\int_a^x \sigma(t)\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n'(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty}\{S_n(x) - S_n(\alpha)\} \\ &= S(x) - s(\alpha)\end{aligned}$$

故$S'(x) = \sigma(x)$，又有

$$S_n(x) = S_n(\alpha) + \int_a^x S_n'(t)\mathrm{d}t$$

由定理4.9可知$S_n(x)$一致收敛到$S(x)$. □

同样，读者可从例子$S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$，$x\in[0,1]$，验证条件是不可少的，而从例子$S_n(x) = \frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)$，$x\in[0,1]$，可知条件并非必要。

把上述的$S_n(x)$看成是某函数项级数的前n项部分和，则由定理4.8—4.11不难得到关于函数项级数的相应定理。

定理4.8' 若在α的某一邻域$(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$内（可以去掉$\alpha$），级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$一致收敛到$S(x)$，且对每个$n$存在极限$\lim_{x\to\alpha} a_n(x) = a_n$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\lim_{x\to\alpha} S(x)$存在，且二者相等。即

$$\lim_{x\to\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\alpha} a_n(x)$$

定理4.9′ 若在 $[a,b]$ 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的每一项都连续，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，则和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续。

定理4.10′ **逐项积分定理** 设在 $[a,b]$ 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，又 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$，且每一 $a_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} a_n(x)\mathrm{d}x$$

又在 $[\alpha,\beta]$ 上，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} a_n(t)\mathrm{d}t$ 一致收敛到 $\int_{\alpha}^{x} S(t)\mathrm{d}t$.

定理4.11′ **逐项微分定理** 若在 $[a,b]$ 上，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 收敛到 $S(x)$，它的每一项都有连续导数 $a_n'(x)$，而且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ 一致收敛到 $\sigma(x)$，则 $S'(x) = \sigma(x)$，亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$.

注 归根结底，积分与求导都是极限运算，因此 § 4.2.2中定理的实质就是两种极限的交换次序。

我们称具有形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

的级数为幂级数。令

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{当 } 0=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty,\\ \infty, & \text{当 } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0,\\ 0, & \text{当 } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty.\end{cases}$$

高等数学中已经给出

定理4.12　柯西—阿达玛定理　幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在 $|x-x_0|<R$ 内绝对收敛，在 $|x-x_0|>R$ 内发散。

这里的 R 就称为是幂级数的收敛半径，并称 (x_0-R,x_0+R) 为幂级数的收敛域。

定理4.13　阿贝尔第一定理　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在点 $x=\xi$ 处收敛，那么它必在 $|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 内绝对收敛，如果幂级数在 $x=\xi$ 处发散，则它必在 $|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 发散。

事实上，在前一情形，$|\xi-x_0|\leqslant R$，而在后一情形，$|\xi-x_0|\geqslant R$. 在区间 (x_0-R,x_0+R) 的端点，幂级数可能收敛也可能发散。

例4—8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故 $R=1$. 于是级数在 $|x|<1$ 内收敛，而在 $|x|>1$ 内发散。在收敛区间的一个端点 $x=1$ 级数发散，而在另一端点 $x=-1$ 级数收敛。 □

定理4.14阿贝尔第二定理　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，则此级数在 (x_0-R,x_0+R) 内的任一个闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，亦即在收敛域 (x_0-R,x_0+R) 内闭一致收敛；若级数在

$x=x_0+R$ 收敛，则它必在$[a,x_0+R]$内一致收敛；若级数在 $x=x_0-R$ 收敛，则它必在$[x_0-R,b]$内一致收敛。

证明 不妨设 $x_0-R<a<b<x_0+R$，记 $\xi=\max\{|x_0-a|,|x_0-b|\}$，则对于任意的 $x\in[a,b]$，恒有

$$|a_n(x-x_0)^n|\leqslant|a_n(\xi-x_0)^n|$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\xi-x_0)^n$ 绝对收敛，由维氏判别法可见级数内闭一致收敛。

若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，则因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\cdot\frac{(x-x_0)^n}{R^n}$$

由于 $|(x-x_0)^n/R^n|\leqslant1$，一致有界，且对每个 x 随 n 单调，因此按阿贝尔判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在$[x_0,x_0+R]$内，因而在$[a,x_0+R]$内一致收敛。在另一端点的情形是类似的。 □

将定理4.8′—4.11′应用于幂级数，则得下面的结论。

定理4.15 幂级数的和函数 $S(x)$ 在它的收敛域(x_0-R,x_0+R)内连续；特别当幂级数在端点 x_0-R 或 x_0+R 收敛时，$S(x)$ 也在 x_0-R 或 x_0+R 连续。

定理4.16 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，它的和函数为 $S(x)$，$x\in(x_0-R,x_0+R)$，则

$$\int_{x_0}^{x}S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

且上式右端级数的收敛半径仍为 R.

证明 由于幂级数在收敛域内闭一致收敛，因此可以逐项求积分而得。因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{|a_n|}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

故求积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R. □

定理4.17 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$ 有相同的收敛半径，且若前者的和函数为 $S(x)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\}$$

证明由读者补足。

由此可知，由幂级数表示的函数 $S(x)$ 在幂级数的收敛域内可以无穷次求导，而且每次求导得到的仍是幂级数，它们有相同的收敛域。在收敛域内求导或求积分都可逐项进行，这是一般函数项级数所不具备的良好性质。

例4－9 由于在 $(-1,1)$ 内

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x}$$

在 $[0,x]$ 上求积分得

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\ln(1+x)$$

由于左边的级数在 $x=1$ 收敛，因此和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 连续，于是得

$$S(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln2$$

□

§4.3 广义积分

广义积分分两种，一种是积分限为无穷的情形，一种是无界函数的积分，我们分别叙述它。

§4.3.1 无穷限的广义积分

设 $f(x)$ 在区间$[a,\infty)$ 上有定义，而且对于每个有限的 $A>a$，$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 有定义，也就是对于每个实数 A，

$$u(A) \triangleq \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

在$[a,+\infty)$上有定义，如果当 $A\to\infty$时，极限

$$\lim_{A\to\infty} u(A) \tag{4-6}$$

存在，就称函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上函数可积，并写

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \tag{4-7}$$

这时我们说 $f(x)$在$[a,+\infty)$上的**广义积分存在或收敛**。上述左边的

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{4-8}$$

泛称为**广义积分**。如果极限(4－6)不存在，自然就称广义积分(4－8)发散。读者不难类似地定义形如

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x \tag{4-9}$$

的广义积分。如果对于 $a=b\triangleq c$，(4－8)，(4－9)的广义积分都存在，则称广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

存在。

例4－10 证明所谓的 p 积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

证明 当 $p=1$ 时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty$$

故广义积分发散。

当 $p\neq 1$ 时，由于

$$\int_a^A\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-a^{1-p})$$

从而

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

故 p 积分在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散。 □

例4－11 $\int_0^{\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 是发散的积分。

因为 $\int_0^A\cos x\mathrm{d}x=\sin A$，当 $A\to\infty$ 时，$\sin A$ 的极限不存在，故 $\int_0^{\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 发散。 □

由广义积分的定义不难验证它具有下面的简单性质：如果下面的积分都收敛，则

(1) $\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\ (c>a)$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

其中 a,c 为任意的实数。

(2)线性性

$$\int_c^{\infty}(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x = a\int_c^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + b\int_c^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

(3)若函数 $u(x)$，$v(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续可导，而且 $\int_a^{\infty} u\mathrm{d}v$，$\int_a^{\infty} v\mathrm{d}u$ 以及 $uv\Big|_a^{\infty}$ 中至少有两个存在，则

$$\int_a^{\infty} u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} u\mathrm{d}v$$

(4)若函数 $x=x(t)$ 在区间 (α,β) 上单调，有连续导数，且 $x(\alpha)=a$，$x(\beta)=\infty$，则有下面的变量替换公式：

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

这里 $x(\beta)=\infty$，理解成 $\lim\limits_{t\to\beta} x(t)=\infty$，而且 α,β 可以取为 $\pm\infty$.

要注意的是：不论 $\alpha<\beta$ 或 $\alpha>\beta$，都要求积分下限 α 应对应积分下限 a，积分上限 β 应对应积分上限 ∞. 由这个性质可见，广义积分有可能化为常义的积分。

例4—12　计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

解令 $x=1/t$，则 I 化为积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

所以，

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

再令 $x-1/x=u$，则

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ □

§4.3.2 无界函数的广义积分(瑕积分)

设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义,在 $x=a$ 的邻域内无界(称 a 为瑕点),但对于任意充分小的正数 η,$f(x)$ 在 $[a+\eta,b]$ 上可积,即

$$\phi(\eta)=\int_{a+\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

存在。如果 $\lim\limits_{\eta\to 0}\phi(\eta)$ 存在,则称此极限值为无界函数在 $[a,b]$ 上的广义积分,记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

此时称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在或收敛,否则称为发散。

自然,对 $f(x)$ 在 $x=b$ 的邻域无界情形(称 b 为瑕点)类似地定义广义积分。为了叙述的方便,今后特别称无界函数的广义积分为**瑕积分**。

设 $f(x)$ 在 $c\in(a,b)$ 的邻域内无界,则我们可分别定义瑕积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$,$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. 而当它们都收敛时,则称它们的和为瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值。如果两者有一个发散,则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

例4—13 讨论 p 瑕积分

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$$

当 $p\leqslant 0$时,积分是常义的。

当 $p>0$时,a 为奇点。

当 $p\neq 1$时,

$$\int_{a+\eta}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}=\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\eta}^{b}$$

$$=\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-\eta^{1-p}]$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & p<1, \\ +\infty, & p>1. \end{cases}$$

而当 $p=1$时，

$$\int_{a+\eta}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln(x-a)\Big|_{a+\eta}^{b} \to +\infty, (\eta \to 0^+)$$

所以，当 $p<1$时，积分收敛，而当 $p\geqslant 1$时，积分发散。 □

对于无界函数的瑕积分也有如同无穷限广义积分的性质，特别对于变量替换只要将那里的∞换成 b 即可。

两种广义积分之间有密切的联系。设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是瑕积分，以 a 为瑕点，作变换 $y=1/(x-a)$，就有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}\mathrm{d}y$$

便变为无穷限的广义积分。

§4.3.3 广义积分的收敛性与收敛性判别法

下面无穷限积分以 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为例，对于无界函数的积分以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(a 为瑕点) 为例。因为广义积分的收敛与否就是指极限 $\lim\limits_{A\to\infty} u(A)$ 或极限$\lim\limits_{\eta\to 0}\phi(\eta)$ 是否存在，因此由极限存在的 Cauchy 原理可得

定理4.18 无穷限的广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，当 $A'>A\geqslant A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

而无界函数的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当$0<\eta<\eta'$时，

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

为简化书写，我们用广义积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 统一表示上述两种广义积分。显然，由定理 4.18 可见，$\int |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛则，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，此时称广义积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 为**绝对收敛**。由此容易得出所谓的比较判别法：

定理4.19 如果有 $|f(x)| \leqslant \psi(x)$，而广义积分 $\int \psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则广义积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

更加实用的是比较判别法的极限形式：

定理4.20 如果 $\lim \dfrac{|f(x)|}{\psi(x)} = l$，$(0 \leqslant l < \infty)$，且 $\int \psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；如果 $\lim \dfrac{|f(x)|}{\psi(x)} = l$，$(0 \leqslant l < \infty)$，且 $\int \psi(x)\mathrm{d}x$ 发散，则积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 发散。这里极限lim 在无穷限积分的情形，是指 $\lim\limits_{x\to\infty}$，而在 $f(x)$ 当 $x \to a$ 为无界函数的情形是指 $\lim\limits_{x\to a}$.

证明 我们只对无穷限情形给出证明。如果 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{\psi(x)} = l \neq 0$，那么对于使得 $l-\varepsilon>0$ 的 ε，存在 x_0，当 $x \geqslant x_0$ 时，

$$0 < l - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{\psi(x)} < l + \varepsilon,$$

即
$$(l - \varepsilon)\psi(x) < |f(x)| < (l + \varepsilon)\psi(x)$$

成立。因此 $\int_a^\infty \psi(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散。

在 $l=0, l=\infty$ 可以类似地说明。 □

由定理4.19，4.20立得下面的定理：

定理4.21 柯西判别法或称 p 判别法

(1)对于无穷限的广义积分,设对任意的 $A>a$,$f(x)$在$[a,A]$上可积,极限$\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x)=l$ 存在,

① 当 $p>1$时,则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

② 当 $p\leqslant 1, l\neq 0$ 时,则广义积分$\int_a^\infty \psi(x)\mathrm{d}x$ 发散。

(2)对于瑕积分,设 a 为 $f(x)$的瑕点,而对于任意的 η,$f(x)$在$[a+\eta,b]$上可积,设极限 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=l$ 存在,则

① 当$0<p<1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

② 当 $p\geqslant 1$,且 $l\neq 0$ 时,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

证明 我们只证(1)。由条件

$$\lim_{x\to\infty} x^p|f(x)| = |l|$$

因此,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在正数 A_0,当 $x>A_0$时,

$$0\leqslant x^p|f(x)| < |l| + \varepsilon \triangleq c,$$

于是

$$0\leqslant |f(x)| < \frac{c}{x^p},\ x > A_0$$

当 $p>1$时,p 积分

$$\int_{A_0}^\infty \frac{c}{x^p}\mathrm{d}x$$

收敛,因而$\int_{A_0}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。又因为

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{A_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{A_0}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

故上式左边的广义积分收敛,"①"得证。

往证"②". 若 $l>0$,则对于充分小的 $\varepsilon>0$,存在正数 $A_1>a$,当 $x>A_1$时,

$$x^p f(x) > l-\varepsilon \triangleq c_1 > 0, \text{即} f(x) > \frac{c_1}{x^p} > 0\ (x > A_1)$$

当 $p \leqslant 1$ 时，p 积分 $\int_{A_1}^{\infty} \frac{c_1}{x^p} \mathrm{d}x$ 发散，因而广义积分 $\int_{A_1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，从而 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

若 $l < 0$，则如上可知 $\int_a^{\infty}(-f(x))\mathrm{d}x$ 发散，因此 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。 □

例4－14 判定

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的收敛性。

因为当 $x \to \infty$ 时，第一个被积函数为2级无穷小，而第二个为1/2级无穷小，因此第一个广义积分收敛，而第二个发散。 □

例4－15 证明概率积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

是收敛的。

证明 由洛必大法则，得

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

因此 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ 收敛，同理可证 $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ 收敛，从而概率积分收敛。 □

例4－16 讨论积分

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma}\ln x}$$

的收敛性。

证明 因为

$$\lim_{x\to\infty} x^p \frac{1}{x^\sigma \ln x} = \lim_{x\to\infty} x^{p-\sigma}\frac{1}{\ln x} = \begin{cases} 0, & \sigma > p \\ \infty, & \sigma < p \\ 0, & \sigma = p \end{cases}$$

所以，当 $\sigma>1$ 时，积分收敛，当 $\sigma\leqslant 1$ 时发散。 □

例4－17 广义积分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

收敛。

因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3/4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}} = 0$$ □

下面是工程数学经常要用到的两个欧拉积分。

例4－18 证明广义积分

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (4-10)$$

当 $\alpha>0$ 时收敛。

把这个积分分成

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \triangleq I_1 + I_2$$

对于 I_1，当 $\alpha-1<0$ 时，$x=0$ 为瑕点。当 $x\to 0$ 时，$x^{\alpha-1}e^{-x}$ 等价于 $x^{\alpha-1}$. 所以当 $\alpha-1>1$，即 $\alpha>0$ 时 I_1 收敛，而当 $\alpha\leqslant 0$ 时积分发散；

对于 I_2 由 p 判别法，它是收敛的，因此 $\Gamma(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时有意义。我们称之为 Γ 函数。 □

例4－19 证明瑕积分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (4-11)$$

在 $0<p<1, 0<q<1$ 时收敛。

证明 在 $0<p<1$ 时，0是瑕点（奇点），在 $0<q<1$ 时，1是瑕点。写

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

第一个瑕积分，由于当 $x\to 0^+$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 等价于 x^{p-1}，由 p 判别法，当 $p>0$ 时收敛，$p\leqslant 0$ 时发散；

第二个瑕积分，由于当 $x\to 1^-$ 时，它等价于 $(1-x)^{q-1}$，所以当 $q>0$ 时收敛，当 $q<0$ 时发散。

从而瑕积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 在 $0<p<1, 0<q<1$ 时收敛，当 $p\leqslant 0, q\leqslant 0$ 时发散，当 $p\geqslant 1, q\geqslant 1$ 时它为常义积分。我们称由(4－11)式定义的函数为 B 函数，它在 $p>0, q>0$ 时有意义。 □

用分部积分法请读者证明递推公式：

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha>0 \qquad (4-12)$$

当 α 是自然数时，我们有

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-2)=\cdots=n!\Gamma(1)$$

而容易算得 $\Gamma(1)=1$，所以 $\Gamma(n+1)=n!$，Γ 函数是阶乘的推广。

容易计算

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

请读者验证：

1. $B(p,q)=B(q,p)$.

2. 用分部积分法证明递推公式：

$$B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q),\ p>-1, q>0. \qquad (4-13)$$

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),\ p>0, q>0. \qquad (4-14)$$

$$B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}B(p,q),p>0,q>0.$$

(4 − 15)

下面证明重要的公式：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (4-16)$$

证明：在 $\Gamma(p)$，$\Gamma(q)$ 的积分表示中分别令 $x=y^2$，$x=z^2$，则得

$$\Gamma(p),\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy\int_0^\infty e^{-z^2}z^{2q-1}dz$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}y^{2p-1}z^{2q-1}dydz$$

将它化为极坐标 $y=\rho\sin\theta$，$z=\rho\cos\theta$，即得：

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty e^{-\rho^2}(\rho\cos\theta)^{2q-1}(\rho\sin\theta)^{2p-1}\rho d\rho$$

外层积分中令 $x=\sin^2\theta$，在里层积分中令 $x=\rho^2$，则得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$$

式得证。 □

最后介绍两个广义积分收敛性的常用的判别法，为此先不加证明地介绍第二中值定理。

定理4.22 第二中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，那么在 $[a,b]$ 上存在 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

(4 − 17)

特别当 $g(x)$ 单调上升时且 $g(a)\geqslant 0$，那么有 ξ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\xi^b f(x)dx \qquad (4-18)$$

定理4.23 阿贝尔判别法 (1)如果 $f(x)$ 在 $[a,\infty]$ 上可积，$g(x)$ 单调有界，则广义积分 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收敛；

(2)设 a 为 $f(x)$ 的瑕点，瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而 $g(x)$ 单调有界，则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 我们只证(1)。在任何的 $[A,A']$ 上应用第二中值定理，存在 ξ 使得

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(A)\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x$$

因为 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $A_0 \geqslant a$，使得当 $A' > A \geqslant A_0$ 时，有

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,\quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

又 $|g(x)| \leqslant L$(某个常数)，所以当 $A' > A \geqslant A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(A)|\left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A')|\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2L\varepsilon$$

根据柯西收敛原理知广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

定理4.24 狄利克来判别法

(1)如果积分 $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 为 A 的有界函数：

$$|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant K,\ K\text{ 为常数},\ a \leqslant A < \infty$$

而 $g(x)$ 单调，且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$，则广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2)设 a 为 $f(x)$ 的瑕点，$\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 η 的有界函数($\leqslant K$)，$g(x)$ 单调且当 $x \to a$ 时趋于零，则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

证明 我们只证(2)。因为 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正数 δ，使得当 $a < x \leqslant a+\delta$ 时，$|g(x)| < \varepsilon$. 应用第二中值定理，并

取$0<\eta<\eta'\leqslant\delta$，则得：

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(a+\eta)|\left|\int_{a+\eta}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$+\ |g(a+\eta')|\left|\int_{\xi}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 4K\varepsilon$$

由柯西原理知瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。 □

例4－20 广义积分

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛，而不绝对收敛。

因为$\int_1^\infty \sin x\mathrm{d}x = |\cos A - \cos 1| \leqslant 2$，而$1/x$单调，而当$x\to\infty$时趋于零，由狄利克来判别法即知

在 $$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$$

攵。但是，

公：

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} \geqslant \frac{1}{2x} - \frac{|\cos x|}{2x}$$

应用狄利克来判别法知道

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

收敛，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x}$$

发散，从而

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

发散。类似的讨论得到

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}\mathrm{d}x$$

当$0<\lambda<1$时收敛,但非绝对收敛。 □

例4－21 积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x,\ 0<\lambda\leqslant 1$$

收敛。

因为

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x$$

收敛,又 $\arctan x$ 在$[1,\infty)$上单调有界,由阿贝尔判别法知道所论的积分收敛。 □

例4－22 讨论积分

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}\mathrm{d}x,\ (0<r\leqslant 2)$$

的收敛性

当$0<r<1$时,

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}\right|\leqslant\frac{1}{x^r}$$

积分绝对收敛。又

$$\left|\int_{\eta}^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\sin 1-\sin\frac{1}{\eta}\right|\leqslant 2,$$

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{2-r}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

当$r<2$时,x^{2-r}单调趋于零$(x\to 0)$,由狄利克来判别法知瑕积分收敛。当$r=2$时,

$$\int_{\eta}^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sin\frac{1}{\eta}-\sin 1,$$

当$\eta\to 0$时无极限,所以积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$$

发散。 □

§4.4 含参变量的积分

设二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有界，如果将 x 固定，则 $f(x,y)$ 就是单变量 y 的函数，若它在 $[c,d]$ 上可积，则

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \qquad (4-19)$$

就是在 $[a,b]$ 上定义的函数。我们称(4－19)式的积分是含参变量 x 的积分，其中 x 就是参变量。如上面遇到的欧拉积分

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x,(\alpha>0)$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0$$

就是含参变量的积分，它们在概率论、工程数学中都有广泛的应用。现在研究如(4－19)式含参变量积分所定义的函数的性质。

定理4.25　连续性定理　若函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续，则函数

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上连续。

证明　只要 $x,x+\Delta x$ 都属于 $[a,b]$ 就有

$$I(x+\Delta x)-I(x)=\int_c^d[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}y$$

因为在矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续的函数是一致连续的，因此对于任意

的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要矩形中的两个点(x_1,y_1),(x_2,y_2),满足$|x_1-x_2|<\delta$,$|y_1-y_2|<\delta$,就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

因此当$|\Delta x|<\delta$,$|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|<\varepsilon$,从而

$$|I(x+\Delta x)-I(x)|$$

$$\leqslant\int_c^d|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon(d-c)$$

所以 $I(x)$在$[a,b]$上连续。

进一步,如果 $c(x)$,$d(x)$均是$[a,b]$上的连续函数,且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$c\leqslant c(x)\leqslant d(x)\leqslant d$,则

$$I(c(x),d(x),x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

作为对于积分上、下限及 x 的连续函数 $I(c,d,x)$的复合函数是连续的。 □

定理4.25的结论也可写为

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}x$$

即积分号与极限号可以交换。那么求导号与积分号能否交换呢?

定理4.26 可微性定理 若 $f(x,y)$,$f_x(x,y)$都在矩形$[a,b;c,d]$上连续,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

证明 设 $x,x+\Delta x\in[a,b]$有

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\mathrm{d}y$$

利用微分中值定理,有

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d f_x(x+\theta\Delta x,y)\mathrm{d}y$$

其中$0<\theta<1$,令 $\Delta x\to 0$,由于 $f_x(x,y)$在$[a,b;c,d]$上连续,极限号

可与积分号交换故得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\int_c^d f'_x(x+\theta\Delta x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \lim_{\Delta x\to 0} f'_x(x+\theta\Delta x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f'_x(x,y)\mathrm{d}y$$

亦即函数 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$I'(x)=\int_c^d f'_x(x,y)\mathrm{d}y$$

这就是在所给的条件下，求导号与积分号可以交换。 □

设 $c(x),d(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且当 $x\in[a,b]$ 时，$c\leqslant c(x)\leqslant d(x)\leqslant d$，则由复合函数求导的法则可得莱布尼兹公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,\mathrm{d}(x))\mathrm{d}'(x)$$

$$-f(x,c(x))c'(x) \qquad (4-20)$$

定理4.27 可积性定理 若函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续，则

$$\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^b\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

证明 记

$$I_1(u)=\int_c^u\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$I_2(u)=\int_a^b\left[\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

对于变动上限的积分

$$\int_c^u \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \triangleq \int_c^u J(y)\mathrm{d}y$$

因为 $J(y)$ 是连续函数，故

$$I'_1(u)=J(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

对于另一个积分

$$I_2(u) = \int_a^b F(x,u)\mathrm{d}x$$

其中

$$F(x,u) = \int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y$$

由定理4.26得

$$I_2'(u) = \int_a^b F_u'(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

于是 $I_1'(u)=I_2'(u)$. 所以

$$I_1(u) = I_2(u) + C$$

其中 C 为常数。令 $u=c$，则得 $I_1(c) = I_2(c) = 0$，从而 $C = 0$，故

$$I_1(u) = I_2(u), c \leqslant u \leqslant d$$

再令 $u=d$，定理得证。 □

我们可利用含参变量的积分计算一些积分。

例4－23　计算积分

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 t + x^2\cos^2 t)\mathrm{d}t, x > 0$$

解　取正数 a,b 使 $a\leqslant x\leqslant b$，被积函数以及它关于参变量 x 的导数在$[0,\pi/2;a,b]$上连续，因此有

$$I'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos^2 t}{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

作变换 $u=\tan t$，得

$$I'(x) = \int_0^{\infty} \frac{2x}{(u^2 + x^2)(1 + u^2)}\mathrm{d}u$$

设 $x\neq 1$（$x=1$时，$I(x)=0$），有

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{2x}{x^2 - 1} \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1}{u^2 + x^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2x}{x^2 - 1}\left[\arctan u\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{x}\arctan\frac{u}{x}\Big|_0^{\infty}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{x+1}$$

求不定积分得到

$$I(x) = \pi \ln(1+x) + C, x \neq 0$$

因为 $I(x)$ 在 $x=1$ 处连续(取开始的 $b>1$),而 $I(1)=0$,在上式中令 $x \to 0$,则得 $C=-\pi \ln 2$,从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 t + x^2 \cos^2 t) \mathrm{d}t = \begin{cases} \pi \ln \dfrac{1+x}{2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

□

例4－24 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x, \ (0 < a < b)$$

解 因为

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t \, \mathrm{d}t$$

所以

$$I = \int_0^1 \left[\int_a^b x^t \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x$$

由于函数 x^t 在 $[0,1;a,b]$ 上连续,由可积性定理交换积分次序得到

$$I = \int_0^1 \left[\int_a^b x^t \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_0^1 x^t \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^{t+1}}{t+1} \bigg|_0^1 \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln(1+t) \bigg|_a^b = \ln \frac{1+b}{1+a} \ (0 < a < b)$$

□

注 为了含参变量积分 $\int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y$ 的存在,我们只需要求 $f(x,y)$ 可积,此时我们可以将 $\int_a^b f(x,y) \mathrm{d}y$ 看成是 Lebesgue 积分,于是由 Lebesgue 控制收敛定理 3.19(稍做修改),关于积分与极限

交换次序的条件就可简化。例如对于连续性，设 $f(x,y)$ 对于每个固定的 $x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 关于 y 可积，而在 x_0 处连续，如果对于任意趋于 x_0 的序列 x_n 有 $|f(x_n,y)|\leqslant C(y)$，其中 $C(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，则由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{x_n\to 0}\int_c^d f(x_n,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\lim_{x_n\to x_0}f(x_n,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

这对任意的趋于 x_0 的序列 x_n 成立，则得连续性定理。

容易看出在定理4.25的条件下，由于二元函数 $f(x,y)$ 的连续性，存在常数 M，使得对一切 x_n，y 恒有 $|f(x_n,y)|\leqslant M$，取 M 为可积的控制函数，由控制收敛定理便可证得连续性定理。

对于可微性定理，只要注意到 $f_x(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 的连续性，也易找到常数 M 作为可积的控制，同样由控制收敛定理证得该定理。

§4.5　含参变量的广义积分

§4.5.1　含参变量的积分的定义与判别法

设广义积分 $\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$ 对于每个 $x\in[a,b]$ 收敛，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0=A_0(\varepsilon)$（只与 ε 有关，与 x 无关），使得当 $A'>A>A_0$ 时，对于一切 $x\in[a,b]$ 有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

则称含参变量的广义积分

$$\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛。我们看出上述定义中收敛性是对积分而

言的，而一致性是对参变量而言的。我们还可将上述定义中的区间 $[a,b]$ 换为 $[a,b)$，(a,b)，(a,∞) 等。

类似的定义还可用于瑕积分。设对于每个 $x\in[a,b]$，瑕积分

$$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

以 d 为奇点而收敛，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在与 $x\in[a,b]$ 无关的 δ，当 $0<\eta<\eta'<\delta$ 时，恒有

$$\left|\int_{d-\eta}^{d-\eta'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\int_{d-\eta}^{d} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

则称瑕积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $a\in[a,b]$ 一致收敛。可见，收敛性是对瑕积分而言的，一致性是对参变量 $a\in[a,b]$ 而言的，$[a,b]$ 也可换为 $[a,b)$，(a,b)，(a,∞) 等。

下面首先介绍含参变量广义积分一致收敛性的判别法。

定理4.28　维尔斯脱拉斯判别法　设存在 $f(x,y)$ 的可积控制函数，即有函数 $F(y)$ 使得 $|f(x,y)|\leqslant F(y)$，$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y<\infty$，且

$$\int_c^\infty F(y)\mathrm{d}y$$

收敛，则 $\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛。

证明　从不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_A^{A'}|f(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_A^{A'}F(y)\mathrm{d}y$$

可立即得到。　□

定理4.29　阿贝尔判别法　设 $\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛，而 $g(x,y)$ 对 y 单调且关于 x 一致有界，即存在正数 L，对所讨论的一切 x,y 成立：$|g(x,y)|\leqslant L$，那么广义积公

$$\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 $x\in[a,b]$一致收敛。

定理4.30　狄利克来判别法　设积分 $\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y$ 对于 $A\geqslant a,x\in[a,b]$ 一致有界，即存在正数 K，使对上述的 A,x 恒成立

$$\left|\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant K$$

又 $g(x,y)$关于 y 单调，且当 $y\to\infty$时，$g(x,y)$关于$[a,b]$上的 x 一致趋于零，即对任意的正数 ε，有 A_0，使当 $y\geqslant A_0$时，对一切的 $x\in[a,b]$成立

$$|g(x,y)|\leqslant\varepsilon$$

那么广义积分 $\int_c^\infty f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛。

只要利用第二中值定理，仿照级数相应判别法的证明即可，请读者完成。对于瑕积分也有完全类似的三个判别法，读者可自行写出。

例4－25　证明含参变量积分 $\int_c^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\sin xt\,\mathrm{d}t$ 关于 $x\in(-\infty,\infty)$ 一致收敛。

证明　易知

$$|\mathrm{e}^{-t^2}\sin xt|\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

而

$$\int_c^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

故由维氏判别法得知，所论的积分关于 $x\in(-\infty,\infty)$一致收敛。

□

例4－26　积分

$$\int_c^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

关于 $\alpha\in[0,\infty)$一致收敛。

证明　因为积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛，不含参数 α，所以关于 α 一致收敛。而 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 关于 x 是单调函数，关于 α 是 x 的一致有界函数

$$0\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha x}\leqslant 1,\ (\alpha\geqslant 0, x\geqslant 0)$$

由阿贝尔判别法知所论的积分关于 $\alpha\geqslant 0$ 一致收敛。 □

下面转入含参变量广义积分性质的叙述。

§4.5.2 含参变量广义积分定义的函数的连续性、可积性与可微性

下面仅讨论无穷限的含参变量的广义积分

$$I(x)=\int_c^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{4-21}$$

所定义函数的性质。对于含参变量的瑕积分定义的函数性质是类似的。

定理4.31 连续性定理 如果函数 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b, y\geqslant c$ 上连续，且含参变量广义积分(4－21)在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

证明 任取 $x, x+\Delta x\in[a,b]$，则易知

$$\begin{aligned}&|I(x+\Delta x)-I(x)|\\ \leqslant&\left|\int_c^A[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\mathrm{d}y\right|\\ &+\left|\int_A^{\infty}f(x+\Delta x,y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_A^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|\end{aligned}$$

给定任意的 $\varepsilon>0$，对于后两个积分，利用广义积分的一致收敛性；对于第一个积分由含参变量积分的连续性，存在 $\delta>0$，当 $|\Delta x|\leqslant\delta$，以及充分大的 A，可使上式小于 ε，得证。 □

由此可知，在定理的条件下，极限号与积分号可交换：

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{\infty}\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y$$

定理4.32 可积性定理 I 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b;c,\infty]$ 上连续，

$$\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛，那么 $I(x)=\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上的积分可以在积分号下进行：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^\infty \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

我们利用含参变量积分与函数项级数的联系来证明定理。设 $\int_c^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，令 $\{A_n\}$ 为单调上升数列，$A_0=c, A_n\to\infty$. 置

$$u_n(x)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)\mathrm{d}y$$

那么级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。事实上，对给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 G，当 $A,A'>G$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 一致地成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$$

由 $A_n\to\infty$，设当 $n>N$ 时，$A_n>G$，于是当 $m>n>N$，对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$|u_n(x)+\cdots+u_m(x)|<\varepsilon$$

这表明 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理的证明 由上述级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且

$$\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)\mathrm{d}y=u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上连续，所以

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \mathrm{d}x \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y) \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x$$

$$= \int_c^{\infty} \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x.$$

这里用到了常义累次积分交换积分次序的定理。 □

定理4.33 可积性定理Ⅱ 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty;c,\infty]$ 上连续，两个积分 $\int_a^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$，$\int_c^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 依次关于 $y \in [c,C]$，$x \in [a,A]$ 上一致收敛($a < A, c < C$)，并且

$$\int_a^{\infty} \mathrm{d}x \int_c^{\infty} |f(x,y)| \mathrm{d}y, \int_c^{\infty} \mathrm{d}y \int_a^{\infty} |f(x,y)| \mathrm{d}x$$

有一个存在，那么

$$\int_a^{\infty} \mathrm{d}x \int_c^{\infty} f(x,y) \mathrm{d}y = \int_c^{\infty} \mathrm{d}y \int_a^{\infty} f(x,y) \mathrm{d}x$$

证明 略。 □

定理4.34 可微性定理 设函数 $f(x,y)$，$f_x(x,y)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$，$y \geqslant c$ 上连续，积分

$$I(x) = \int_c^{\infty} f(x,y) \mathrm{d}y$$

在区间$[a,b]$上可微，且 $\int_c^{\infty} f_x(x,y) \mathrm{d}y$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在$[a,b]$上可微，且

$$I'(x) = \int_c^{\infty} f'(x,y) \mathrm{d}y$$

证明 记

$$G(x) = \int_c^{\infty} f_x(x,y) \mathrm{d}y, \ a \leqslant x \leqslant b$$

往证 $I'(x)=G(x)$. 由连续性定理,$G(x)$在$[a,b]$上连续,沿$[a,x]$积分得到

$$\int_a^x G(x)\,dx=\int_a^x\left\{\int_c^\infty f_x(x,y)\,dy\right\}dx$$
$$=\int_c^\infty\left\{\int_a^x f_x(x,y)\,dx\right\}dy$$
$$=\int_c^\infty[f(x,y)-f(a,y)]dy=I(x)-I(a)$$

两端对 x 求导,得

$$G(x)=I'(x),a\leqslant x\leqslant b$$

得证。 □

例4—27 求狄利克来积分

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

解 引入一个因子 $e^{-\alpha x}$到被积函数,而考虑积分

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x},\alpha\geqslant 0$$

由例4—26它在 $\alpha\geqslant 0$上一致收敛,且 $I=I(0)$. 令

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}1, & x=0\\ e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

则 $f_\alpha(x,\alpha)=-e^{-\alpha x}\sin x$, 显然 $f(x,\alpha)$, $f_\alpha(x,\alpha)$在$[0,\infty;0,\infty)$上连续,又 $I(\alpha)$是$[0,\infty)$上连续函数,从而

$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)$$

往求 $I(\alpha)$,先求 $I'(\alpha)$ $(\alpha>0)$。因为

$$\int_0^\infty f_\alpha(x,\alpha)dx=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx$$

这个积分在任意的 $\alpha\in[\varepsilon,\infty)(\varepsilon>0)$上一致收敛,这是由于

$$|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\alpha x},$$

而积分 $\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dx$ 收敛。由可微性定理得到对 $\alpha \in (\varepsilon, \infty)$ 有

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} -e^{-\alpha x}\sin x dx$$
$$= \frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{1+\alpha^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

这表明对一切 $\alpha > 0$，

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

从而

$$I(\alpha) = -\arctan\alpha + C$$

而

$$|I(\alpha)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

当 $\alpha \to \infty$，$I(\alpha) \to 0$，从而得 $C = \pi/2$，所以

$$I = I(0) = \lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$$ □

在上述积分中作变换 $\beta x = z$ 得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \beta < 0 \end{cases}$$

例4—28 计算积分 $I(y) = \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos 2yx\, dx, (a > 0)$.

解 记被积函数为 $f(x,y)$. 考虑积分

$$\int_0^{\infty} f'_y(x,y)dx = -2\int_0^{\infty} xe^{-a^2x^2}\sin 2yx\, dx$$

由于 $|xe^{-a^2x^2}\sin 2yx| \leqslant xe^{-a^2x^2}$，而 $\int_0^{\infty} xe^{-a^2x^2}dx$ 收敛，所以

$$\int_0^{\infty} f'_y(x,y)dx$$

一致收敛,因此

$$I'(y)=-2\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-a^2x^2}\sin 2yx\,\mathrm{d}x$$

对右端分部积分,得到

$$I'(y)=\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-a^2x^2\sin 2yx}\Big|_0^{\infty}-\frac{2y}{a^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos 2yx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2y}{a^2}I(y)$$

积分这个方程,得到

$$I(y)=Ce^{-\frac{y^2}{a^2}}$$

而

$$C=I(0)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2a}$$

最后得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos 2yx\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{a^2}}$$ □

含参变量广义积分有许多应用,上述只是两个简单的例子。

习题四

1. 对于几何形体上的积分,证明其四则运算性质。

2. 证明中值定理:若 $f(M)$,$g(M)$在 Ω 上可积,$g(M)$在 Ω 上不变号,则

$$\int_{\Omega}f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega=\mu\int_{\Omega}g(M)\mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\inf\limits_{M\in\Omega}f(M)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{M\in\Omega}f(M)$,若 $f(M)$在 Ω 上连续,则成立

$$\int_{\Omega}f(M)g(M)\mathrm{d}\Omega=f(P)\int_{\Omega}g(M)\mathrm{d}\Omega$$

其中 $P\in\Omega$.

3. 若 $f(M)$, $g(M)$ 在 Ω 上连续，在 Ω 的任何部分区域 $\Omega'\subseteq\Omega$ 上有

$$\int_{\Omega'} f(M)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'} g(M)\mathrm{d}\Omega$$

则在 Ω 上成立：$f(M)\equiv g(M)$.

4. 若 $|f(M)|$ 在 Ω 上可积，那么 $f(M)$ 是否一定可积？考察

$$f(x,y)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x,y \text{ 中至少有一个是无理数时}\\ 1, & \text{当 } x,y \text{ 皆为有理数时}\end{cases}$$

5. 讨论下列函数列在所示的区域内的一致收敛性：

(1) $S_n(x)=\sqrt{x^2+1/n^2}$, $-\infty<x<\infty$.

(2) $S_n(x)=\sin x/n$,

(i) $-l<x<l$;

(ii) $-\infty<x<\infty$.

(3) $S_n(x)=x^n(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

(4) $S_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, $0<x<1$.

6. 讨论下列级数的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(x^2+1)^n}$, $-\infty<x<\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $-\infty<x<\infty$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$, $0<x<\infty$.

7. 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$$

在任何区间[1+α,∞),α>0上一致收敛。(提示:当$h>0$时,$\log(1+h)<h$.)

8. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在(0,∞)内连续。

9. 证明函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^3}$$

在(−∞,∞)内连续,并有连续的导数。

10. 证明

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在(1,∞)连续并有连续的各阶导数。

11. 利用逐项微分法求下列级数的和:.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

12. 利用逐项积分法求下列级数之和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

13. 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$$

在整个实数轴上一致收敛,但在任何区间内不能逐项求导。

14. 先证

$$\frac{1-r^2}{1-3r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

当$|r|<1$时成立,进而证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-3r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=2\pi(|r|<1)$$

15. 讨论下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;

(2) $\int_1^{\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(4) $\int_0^{\infty} 1 \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$;

(5) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)^2}}$.

(8) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$.

16. 讨论下列积分的收敛性：

(1) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_2^{\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

17. 设 $\phi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\mathrm{d}y$ ，试证：

$$\phi(x) = 2\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\phi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2$$

18. 利用上题的公式计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x$.

19. 设 $F(y) = \int_0^y (x+y)f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 为可微函数,求 $F''(y)$.

20. 求函数

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\mathrm{d}\psi,$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},(0<K<1)$$

的导数、且证明

$$E''(k) = \frac{1}{k}E'(K) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0$$

21. 应用对参数的微分法计算积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x \quad (a>1)$;

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-3a\cos x+a^2)\mathrm{d}x \quad (|a|<1)$.

22. 应用积分号下求积分的方法计算积分:

(1) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0)$;

(2) $\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0)$.

23. 证明积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos x\mathrm{d}x$$

在区间$0<\alpha_0\leqslant\alpha<\infty$上一致收敛。

24. 证明积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} \mathrm{d}y$$

在 $-\infty < x < \infty$ 内一致收敛。

25. 设函数 $f(x,y)$ 在$[a,\infty;c,d]$ 上连续，对$[c,d)$ 上的每个 y，$\int_a^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛，但积分在 $y=d$ 发散，那么这积分在$[c,d)$ 上一定不一致收敛。

26. 证明积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x$$

在 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$时一致收敛，但在$0<\alpha<1$内不一致收敛。

27. 讨论下列积分在所给定区间内的一致收敛性：

(1) $\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \quad (y \geqslant a > 0)$；

(2) $\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2+1} \mathrm{d}x \quad (-\infty < y < \infty)$；

(3) $\int_0^1 \ln xy \mathrm{d}x \quad (\frac{1}{b} \leqslant y \leqslant b, b > 1)$；

(4) $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x \mathrm{d}x$；

$(i)\ p \geqslant p_0 > 0$；

$(ii)\ p > 0$.

28. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} \mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} \mathrm{d}x$.

29. 证明：若 $a > 1$，则

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+nx^a} = 0$$

30. 设闭区间$[0,1]$上的连续函数 $f(x)$ 严格为正，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]^n$$

第五章　泛函分析初步

泛函分析是现代数学中的一个重要分支，其思想与方法已渗透到纯粹数学与应用数学、物理学、信息科学及现代工程技术的许多领域。目前，泛函分析已成为现代工程技术人员必须具备的数学基础之一，因而，许多理工科院校为高年级本科生或研究生开设了这门课程。

泛函分析起源于经典分析，其发展动力来自逼近理论、变分法、积分方程、线性常微分方程及偏微分方程，乃至量子场论、统计物理等领域中的实际问题。如最速下降线问题，即要求一初速为零的质点仅在重力作用下在一铅直平面内从点 $A(x_0,y_0)$ 沿曲线 Γ: $y=y(x)$ 滑到点 $B(x_1,y_1)$ 所需时间最短，求 Γ 的方程 $y=y(x)$. 利用能量守恒定律可知

$$T=\Gamma\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

则 T 是 $y(x)$ 的函数，记为 $T[y(x)]$，要求 T 的极小值。显然，用微积分的方法解此问题比较困难，而泛函分析为这一类问题的解决提供了新的思想和方法。本章介绍泛函分析的基本概念与重要定理，其中包括赋范线性空间，线性算子与线性泛函，Banach 空间的基本定理与应用，Hilbert 空间几何学，最佳逼近与泛函的极值。

§5.1 赋范线性空间

为了下面叙述的需要，我们先证明两个重要的不等式。这两个不等式都有三种形式：有限和形式，级数形式，积分形式。一般地总是由简单到复杂循序介绍它，但这里我们采取先介绍抽象积分形式的不等式，而把级数形式作为特例而给出，有限和形式可作为习题留给读者，这样也可使读者体会到三种形式的联系与统一。

§5.1.1 Holder 与 Minkovski 不等式

考虑一般的测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$，令

$$L^p = \{f \mid f\text{ 是可测函数，且}\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu < \infty\}$$

引理 5.1 Holder 不等式 设 $f(x) \in L^p, g(x) \in L^q$，则当 p,q 共轭，即 $p,q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时，$f(x)g(x)$ 可积，且

$$\int_X |f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g(x)|^q \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5-1}$$

证明 设 $0 < \alpha < 1$，函数 $\phi(x) = x^\alpha - \alpha x\,(0 < x < \infty)$ 的导函数 $\phi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ 在 $(0,1)$ 中为正，当 $x > 1$ 时为负。所以 $\phi(x)$ 在 $x = 1$ 处有最大值，于是

$$\phi(x) \leqslant \phi(1) = 1 - \alpha\,(0 < x < \infty)$$

设 a,b 为两个正数，在上式中置 $x = a/b$，再乘以 b，得

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b$$

令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1 - \alpha = \frac{1}{q}$，那么

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \tag{5-2}$$

如果f,g中有一个几乎处处为0,(5－1)式自然成立。所以我们可假定(5－1)式右边为正。令

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu}}, \gamma(x) = \frac{g(x)}{\sqrt[q]{\int_X |g(x)|^q \mathrm{d}\mu}}$$

在不等式(5－2)中令

$$a = |\phi(x)|^p, b = |\gamma(x)|^q$$

则得

$$|\phi(x)\gamma(x)| \leqslant \frac{|\phi(x)|^p}{p} + \frac{|\gamma(x)|^q}{q} \tag{5-3}$$

所以$\phi(x)\gamma(x)$可积,从而$f(x)g(x)$可积。在(5－3)式两边积分,则得

$$\int_X |\phi(x)\gamma(x)| \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

定理得证。 □

引理 5.2 Minkovski 不等式 设$f,g \in L^p, p \geqslant 1$,则

$$\sqrt[p]{\int_X |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu} + \sqrt[p]{\int_X |g(x)|^p \mathrm{d}\mu} \tag{5-4}$$

证明 当$p = 1$时,(5－4)式是明显的。当$p > 1$时,因为

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}\mu = \int_X |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \mathrm{d}\mu + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu} \sqrt[q]{\int_X |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu}$$

$$+ \sqrt[p]{\int_X |g(x)|^p \mathrm{d}\mu} \sqrt[q]{\int_X |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \mathrm{d}\mu}$$

$$= \left(\sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu} + \sqrt[p]{\int_X |g(x)|^p \mathrm{d}\mu}\right)$$

$$\times \sqrt[q]{\int_X |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}\mu}$$

这里要注意 p,q 共轭，$(p-1)q = p$，将上式两边除以

$$\sqrt[q]{\int_X |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}\mu}$$

则得(5－4)式。 □

引理 5.3 序列情形的 Holder 与 Minkovski 不等式 设

$$l^p = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\}$$

则当 $p,q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时，成立 Holder 不等式：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5-5)$$

而当 $p \geqslant 1$ 时成立 Minkovski 不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} (5-6)$$

证明 考虑测度空间 $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}), \mu)$，其中 $\mathbf{N}$ 为自然数全体，$\mathscr{P}(\mathbf{N})$ 为 $\mathbf{N}$ 的一切子集，对于每个自然数 n，赋予测度 1，易知$(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}), \mu)$ 是一个测度空间，这个测度也称为计数测度。容易看出，任意的无穷序列都是可测函数，l^p 就是满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ 序列 $\{\xi_n\}$ 的全体，对这样的可测函数的积分就是对序列的求和 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$. 因此对 $f = \{\xi_n\} \in l^p, g = \{\eta_n\} \in l^q$，由(5－1)式知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| < \infty$，且(5－5) 式得证。同样，由(5－4) 式得证(5－6) 式。 □

注 Holder 不等式和 Minkovski 不等式对于右边为无穷情形是自然成立的。特别，对于数列的有限和是成立的。当 $p=2$ 时的

Holder 不等式也称作 Cauchy 或 Schwarz 不等式。

§5.1.2 线性空间

线性空间在数学的许多分支及其应用中都有重要作用。在许多实际问题中，考虑的对象 X 可能是三维欧氏空间，或数列全体，或函数全体，或某测度空间上的可测函数全体。这些元素按通常方式可定义线性运算：加法与数乘，且通过这两种运算后仍是 X 中元素。这种背景提出了所谓线性空间的概念。

定义 5.1 设 X 为一非空集合，若在 X 上定义了线性运算：$\forall\ x,y\in X$，存在 $u\in X$，使得 $u=x+y$；$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 为实数系），$x\in X$，$\alpha\cdot x\in X$，当这两种运算满足：

(1) $(X;+)$ 是可换群（见定义 1.4）；

(2) 数乘运算满足：

(i) $1\cdot x=x$；

(ii) $a\cdot(b\cdot x)=(a\cdot b)\cdot x,(a,b\in\mathbf{R})$；

(iii) $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x, a\cdot(x+y)=a\cdot x+b\cdot y$；

则称 X 为**线性空间**（或称为**向量空间**）。

为书写方便，以下数乘符号“·”忽略不写。

例 5-1 空间 C^n 由一切有序实数 n 元组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 组成。对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in C^n$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in C^n$，定义 $x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)\in C^n$，$\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n)$，$x\in\mathbf{R}$，则 C^n 是线性空间。

例 5-2 空间 $C([a,b])$ 由连续实值函数全体组成。对 $C([a,b])$ 中 $x=x(t)$，$t\in[a,b]$，和 $y=y(t)$，$t\in[a,b]$，定义 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$t\in[a,b]$，$(\lambda x)(t)=\lambda x(t)$，则 $C([a,b])$ 是线性空间。

例 5-3 空间 l^2 由满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2<\infty$ 的全体实数序列 $x=$

$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 所组成，定义加法与数乘如下：

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots)+(\eta_1,\eta_2,\cdots)=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$$

$$\alpha(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots)$$

则 l^2 是一个线性空间。

只需验证 l^2 对"加法"与"数乘"运算封闭即可，而这由 Cauchy 不等式是明显的(见引理 5.3 之注)。

在线性空间 X 中，称 n 个元素 $x_i\in X,i=1,2,\cdots,n$ **线性相关**，如果存在不全为零的常数 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\theta$($\theta$ 为 X 中零元素)。否则，称这 n 个元素是**线性无关**的。

对线性空间 X 中的元素 $x_1,\cdots,x_n,y$，如存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得 $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$，则称 y 可由 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ **线性表出**。

如线性空间 X 中存在 n 个线性无关的元素 $e_i,i=1,2,\cdots,n$ 使得 $\forall\ x\in X$，x 可由 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 线性表出，则称 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 X 的一组基，并称 X 为 n **维线性空间**。当 n 为无穷大时，称 X 为**无穷维线性空间**，否则，称 X 为**有限维线性空间**。易知，C^n 是有限维线性空间，l^2 为无穷维线性空间，我们用 $\dim X$ 表示空间 X 的维数。

对于两个线性空间 X 和 $\widetilde{X}$，如果存在 $1-1$ 对应 $\phi:X\to\widetilde{X}$，使得 $\forall\ x,y\in X,\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y),\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x)\qquad(5-7)$$

则称 X 与 $\widetilde{X}$ **线性同构**，称 ϕ 为**同构映射**。对线性同构的线性空间，在数学上将它们"等同"起来。

例 5-4　记 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间，则任一 n 维线性空间均与 $\mathbf{R}^n$ 线性同构。

定义 5.2　设 X 为线性空间，$E\subseteq X$，如果 $\forall\ x,y\in E,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，都有 $\lambda x+\mu y\in E$，则称 E 是 X 的**子空间**。设 $A\subseteq X$，称 $M=\{y\mid y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\lambda_i\in\mathbf{R},x_i\in A,i=1,2,\cdots,n\}$ 为由 A 张成的线性

子空间。

对于线性空间 X 的一个子集 M，如果 $\forall\ x, y \in M, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$，且 $\lambda + \mu = 1, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$，均有 $\lambda x + \mu y \in M$，则称 M 是 X 的一个**凸子集**。

§5.1.3 线性空间上的范数

定义 5.3 设 X 是线性空间，如果 X 上的实值函数 $p(x)$ 满足

(1) $p(x) \geqslant 0$，且 $p(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$（$\theta$ 为 X 的零元素）；

(2) $p(\alpha x)=|\alpha| p(x), x \in X, \alpha \in \mathbf{R}$；

(3) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), x, y \in X$

则称 $p(x)$ 为 x 的范数，通常记为 $\|x\|$，并称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，或简称赋范空间。

注意 $X=\mathbf{R}$ 时，令 $p(x)=|x|, x \in \mathbf{R}$，则 $|\cdot|$ 是 $\mathbf{R}$ 上范数。由此可知，范数是绝对值概念的延伸。

例 5-5 对于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，$\forall\ x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$，令

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的范数。此范数常记为 $\|\cdot\|_2$.

$\forall\ x \in C([a,b])$，令 $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$，则 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([a,b])$ 上的范数。

例 5-6 线性空间 $l^p (1 \leqslant p < \infty)$ 是由满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ 的全体实数序列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 所组成的。$\forall\ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^p$，令

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (5-8)$$

则 $\|\cdot\|_p$ 是 l^p 上的范数。

证明 只需证明 $\|\cdot\|_p$ 满足定义 5.3 中(3)，而这由

Minkovski 不等式可得到。 □

例 5-7　对 $p\geqslant 1$，令

$$L^p([a,b]) = \{f \mid f \text{ 为 Lebesgue 可测，且} \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}$$

定义

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (5-9)$$

读者可根据引理 5.1 和引理 5.2 关于积分形式的 Holder 不等式与 Minkovski 不等式证明 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p[a,b]$上的范数。

定义 5.4　设 X 为线性空间，$d(x,y)$是 X 上二元函数，如果 $d(x,y)$满足

(1) $\forall\, x\in X, y\in X, d(x,y)\geqslant 0$；且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $\forall\, x\in X, y\in X, d(x,y)=d(y,x)$；

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)(x\in X, y\in X, z\in X)$，

则称 $d(x,y)$为 X 上的距离(或度量)，称(X,d)为距离空间(或度量空间)。

如果 $\|\cdot\|$ 是线性空间 X 上的范数，则$\forall\, x,y\in X$，令

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad (5-10)$$

则易验证(5－10)式定义了线性空间 X 上的一个距离。由上可知，赋范空间都是距离空间。但一个距离是否由某个范数确定呢？

例 5-8　设 l_0 由一切实数序列组成，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l_0$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l_0$，定义距离如下：

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|} \qquad (5-11)$$

则 $d(\cdot,\cdot)$不能由某个范数确定。

这由下述引理得知：

引理 5.4　赋范空间 X 上的距离 $d(\cdot,\cdot)$由某范数导出，当

且仅当$d(x+a,y+a)=d(x,y)$，$d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$，$x,y,a\in X$，$\alpha\in\mathbf{R}$.

证明 充分性：$\forall\ x\in X$，令$\|x\|=d(x,\theta)$（θ为X的零元素），则由$\|x\|=d(x,\theta)=0$，有$x=\theta$. 而

$$\|\alpha x\|=d(\alpha x,\theta)=d(\alpha x,\alpha\theta)=|\alpha|d(x,\theta)=|\alpha|\,\|x\|$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=d(x+y,\theta)\leqslant d(x+y,y)+d(y,\theta)\\&=d(x,\theta)+d(y,\theta)=\|x\|+\|y\|\end{aligned}$$

从而可知$\|\cdot\|$是X上的范数，且$d(\cdot,\cdot)$由范数$\|x\|$所确定。

必要性：若d由某个范数$\|x\|$所确定，则$d(x,y)=\|x-y\|$，从而

$$\begin{aligned}d(x+a,y+a)&=\|x+a-(y+a)\|\\&=\|x-y\|=d(x,y)\end{aligned}$$

$$d(\alpha x,\alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\,\|x-y\|=|\alpha|d(x,y)$$

引理得证。 □

在例5－8中，考虑$x=(1,0,0,\cdots)$，则

$$d(2x,\theta)=\frac{1}{3},2d(x,\theta)=\frac{1}{2}$$

故$d(2x,\theta)\neq|2|d(x,\theta)$，从而可知$l_0$上由(5－11)式定义的距离不能由某个范数确定。

§5.1.4 赋范线性空间的完备性

由于赋范空间是度量空间，所以赋范线性空间X中的序列存在收敛性与X的完备性概念。

定义5.5 称赋范空间X的序列$\{x_n\}$是依范数收敛的，若存在$x\in X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$；赋范空间中序列$\{x_n\}$称为Cauchy序列，是指：$\forall\ \varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$\|x_m-x_n\|<\varepsilon$

$(m,n>N)$.

如果赋范线性空间 X 的每个 Cauchy 序列收敛于 X 中某点，则称 X 是完备的。完备的赋范线性空间称为 Banach 空间。

例 5-9 赋范线性空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$是完备的，从而是 Banach 空间。

证明 设$\{x_n\}$是 l^p 中任一 Cauchy 列，其中 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots)$，则$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得

$$\|x_m-x_n\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon(m,n>N) \tag{5-12}$$

于是，对于每个 j，

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon(m,n>N)$$

因此，对每个固定的 j，$(\xi_j^{(1)},\xi_j^{(2)},\cdots)$是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 列，由 $\mathbf{R}$ 的完备性知存在唯一的 $\xi_j\in\mathbf{R}$，使得

$$\xi_j^{(m)}\to\xi_j(m\to\infty)$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，则 $x\in l^p$ 且 $\|x_m-x\|_p\to0(m\to\infty)$.

事实上，由(5-12)式，对一切 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p<\varepsilon^p(m,n>N)$$

令 $n\to\infty$，有

$$\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p(m>N,k=1,2,\cdots)$$

令 $k\to\infty$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p\leqslant\varepsilon^p(m>N) \tag{5-13}$$

从而有 $\|x_m-x\|_p\leqslant\varepsilon^p<\infty(m>N)$，$x-x_m\in l^p$.

由 Minkovski 不等式(5-6)知 $x=x_m+(x-x_m)\in l^p$. 又由(5-13)式知 $\|x_m-x\|^p\to0$，$(m\to\infty)$，所以，l^p 是完备的赋范线性空间，从而是 Banach 空间。 □

例 5-10 闭区间$[a,b]$上连续实值函数全体$C([a,b])$构成一个线性空间。设$p\geqslant 1$，对$x\in C([a,b])$，定义范数

$$\| x \|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

则$(C([a,b]), \| \cdot \|)$是不完备的。

事实上，不妨设$C([a,b])$，对每个$m\in \mathbf{N}$，令

$$x_m(t) = \begin{cases} 0, & t\in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ m\left(t-\frac{1}{2}\right), & t\in \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right] \\ 1, & t\in \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m},1\right] \end{cases}$$

当$n>m>0$时

$$\| x_m - x_n \|_p = \left(\int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{2}{m}$$

故$\{x_m\}$为 Cauchy 列，但不存在$x\in C([0,1])$，使得

$$\lim_{m\to\infty} \| x_m - x \|_p = 0$$

否则，即对某$x\in C([0,1])$，有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m\to\infty} \| x_m - x \|_p \\ &\geqslant \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|^p \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^1 |1 - x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

则由x在$[0,1]$上连续性知$x(t)=0, t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$。而$x(t)=1, t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，这与$x\in C([0,1])$矛盾。 □

收敛性，完备性均与范数的定义有关。如在$C([a,b])$上定义范数：

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

则容易看出$\| x_n - x \| \to 0$，表明$x_n(t)$一致收敛到函数$x(t)$，而闭

区间上连续函数的一致收敛的极限函数仍是连续函数，故 $x\in C([a,b])$. 因此，在上述范数下，$(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间。

例 5-11 考虑一般的测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$，令

$$L^p=\left\{f\,|\,f\text{ 是可测函数，且}\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$$

则 $(L^p,\|\cdot\|_p)$ 是完备空间。

证明 设 $\{f_n\}$ 是 L^p 的 Cauchy 列，只要证明存在 $f\in L^p$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

取收敛的级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$，对于每个 i，取 n_i，使当 $n,m\geqslant n_i$ 时，

$$\|f_n-f_m\|<\frac{1}{2^i}$$

不妨假设 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\infty$$

因为非负函数

$$S_m=|f_{n_1}|+\sum_{i=1}^{m}|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}|\in L^p$$

当 m 趋于无穷时，极限有限或正无穷，由 Fatou 引理及三角不等式

$$\int_X\lim_{m\to\infty}(S_m(x))^p\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\int_X|S_m(x)|^p\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_{m\to\infty}\|S_m\|^p\leqslant\left(\|f_{n_1}\|+\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|\right)^p<\infty$$

因此，

$$\lim_{m\to\infty}S_m(x)<\infty\quad a.e.$$

这表明级数 $f_{n_i}+\sum\limits_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}-f_{n_i})a.e.$ 收敛，即极限

$$\lim_{i\to\infty}f_{n_i}(x)$$

几乎处处存在。令

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}(x) & \text{当此极限存在且有限}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

显然，f 为可测函数，往证 $f\in L^p$，且 $f_n\xrightarrow{p}f$. 为此，对任意的 $\varepsilon>0$，取 N 充分大，使当 $n,m>N$ 时，

$$\| f_n - f_m \|^p < \varepsilon$$

取 k_0 充分大，使得 $k_0>N$，那么当 $n\geqslant N,k>k_0$ 时，

$$\int_X |f_n - f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

应用 Fatou 引理于 $|f_n-f_{n_k}|^p,(k>k_0)$ 得

$$\int_X |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon,(n > N)$$

这表明 $f_n-f\in L^p$，而 $f_n\in L^p$，故 $f\in L^p$. 且 $f_n\xrightarrow{p}f$. □

定义 5.6　设 X 与 $\widetilde{X}$ 为两个赋范线性空间，对应的范数分别为 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$，如果存在线性同构映射 $\phi:X\to\widetilde{X}$，即 $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y),\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x),x,y\in X,\lambda\in\mathbf{R}$，满足 $\|\phi(x)\|_{\widetilde{X}}=\|x\|_X$，则称 X 与 $\widetilde{X}$ 是等距同构的，或等价的。

定理 5.5(完备化)　设$(X,\|\cdot\|)$是一赋范空间，则存在一个 Banach 空间 $\hat{X}=(\hat{X},\|\cdot\|)$和一个等距同构映射 $\phi:X\to\hat{X}$，使得 $\phi(x)$在 $\hat{X}$ 中稠密，且除等距不计外，空间 $\hat{X}$ 是唯一的。

证明　记 X 中 Cauchy 序列全体所成的空间为 $\overline{X}$，对于$\{x_n\}\in\overline{X},\{x_n'\}\in\overline{X}$，若

$$\| x_n - x_n' \| \to 0(n\to\infty)$$

则称$\{x_n\}$与$\{x_n'\}$是等价的，记为$\{x_n\}\sim\{x_n'\}$. 易证～是 $\overline{X}$ 上的等价关系。记 $\hat{X}$ 为 $\overline{X}$ 上等价类全体所组成的空间。$\forall\ \hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$，令 $\hat{x}+\hat{y}$ 为$\{x_n+y_n\}$所在的等价类，其中$\{x_n\}$，$\{y_n\}$为等价类 $\hat{x},\hat{y}$ 的代表元，$\alpha\hat{x}$ 为$\{\alpha x_n\}$所在的等价类，则 $\hat{X}$ 为线性空间。

$\forall\ \hat{x}=\{\widetilde{x}_n\}$（表示$\{x_n\}$所在的等价类），定义

$$\| \hat{x} \|_{\hat{X}} = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_X$$

此极限是存在的，因$\{x_n\}$是 Cauchy 列，则由$| \| x_m \|_X - \| x_n \|_X |$ $\leqslant \| x_m - x_n \|$知$\{ \| x_n \|_X \}$是$\mathbf{R}$中的Cauchy 列，因此极限存在。这个极 限值不依赖于$\{\tilde{x}_n\}$中代表元的选取，实因$\forall\ \{x_n'\}\sim\{x_n\}$，有

$$| \| x_n' \|_X - \| x_n \|_X | \leqslant \| x_n' - x_n \|_X \to 0 (n \to \infty)$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n' \|_X = \lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \|_X$，不难验证$\| \cdot \|_{\hat{X}}$是$\hat{X}$上的范数，从而$(\hat{X}, \| \cdot \|_{\hat{X}})$是赋范线性空间。

$\forall\ x\in X$，有$\{x,x,\cdots\}\in\hat{X}$，作映射$\phi: X\to\hat{X}$，$\forall\ x\in X$，$\phi(x)=\{\tilde{x}\}$，$\{\tilde{x}\}$为$\{x,x,\cdots\}$所在的等价类，则ϕ是单射，而且$\| \phi(x) \|_{\hat{X}} = \| x \|_X$，$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$，$\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x)$，$x,y\in X$，$\lambda\in\mathbf{R}$. 因此$\phi$是等距同构映射，可知在等距同构意义下，$X$是$\hat{X}$的子空间。

其次，可证X在$\hat{X}$中稠密。事实上，$\forall\ \hat{x}\in\hat{X}$，取$\{x_n\}$为等价类$\hat{x}$中的 Cauchy 列，从而，$\forall\ \varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得$\| x_n - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$，$(n,m>N)$，固定$n>N$，记$x^n=\{x_1^n,x_2^n,\cdots\}$，其中$x_i^n=x_n$，$i=1,2,\cdots$，则

$$\| x^n - \hat{x} \|_{\hat{X}} = \lim_{m\to\infty} \| x_m^n - x_m \|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon (n > N) \tag{5-14}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} \| x^n - \hat{x} \|_{\hat{X}} = 0$，而$x_n \in X$，$n=1,2,\cdots$，故$X$在$\hat{X}$中稠密。

最后证明$\hat{X}$是完备的。设$\{\hat{x}_n\}$是$\hat{X}$中 Cauchy 列，由上可知，对每个$\hat{x}_n$存在$x_n\in X$，使得

$$\| \hat{x}_n - x_n \|_{\hat{X}} < \frac{1}{n}$$

由于

$$\| x_n - x_m \|_X = \| x_n - x_m \|_{\hat{X}}$$

$$\leqslant \|x_n - \hat{x}_n\|_{\hat{X}} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{X}} + \|\hat{x}_m - x_m\|_{\hat{X}}$$

$$< \frac{1}{n} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{X}} + \frac{1}{m}$$

$$\to 0(n,m \to \infty)$$

因此$\{x_n\}$是 X 中 Cauchy 列，记 $\hat{x}=\{\tilde{x}_n\}$，由(5－6)式有

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{\hat{X}} \leqslant \|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{X}} + \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{X}}$$

$$< \frac{1}{n} + \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{X}} \to 0(n \to \infty)$$

所以$(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$是完备的。唯一性证明略。 □

称 $\hat{X}$ 为 X 的完备化空间。

对于赋范线性空间的有限维子空间，有

定理 5.6　赋范空间 X 的每个有限维子空间 Y 是完备的。特别，一切有限维赋范空间是完备的。

证明　设 Y 是$(X, \|\cdot\|)$的 n 维子空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 Y 的任意一个基。$\{y_m\}$是 Y 的 Cauchy 列，则由基的定义知，$y_m=\alpha_1^m e_1+\alpha_2^m e_2+\cdots+\alpha_n^m e_n$. 因$\{y_m\}$是 Cauchy 列，故$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得$\|y_m-y_k\|<\varepsilon(m,k>N)$. 可证(＊)存在$C>0$，使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)})e_i\right\| \geqslant C\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}| \quad (5-15)$$

由

$$\varepsilon > \|y_m - y_k\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)})e_i\right\|$$

$$\geqslant C\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}|(m,k > N)$$

知，对 $m,k>N$，$1\leqslant j\leqslant n$，有

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{C}$$

从而可知$\forall\ j=1,2,\cdots,n\{\alpha_j^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$为 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 列，记$\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_j^{(m)}$

$=\alpha_j, j=1,2,\cdots,n$，令 $y=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$，则 $y\in Y$，且

$$\| y_m - y \| = \| \sum_{i}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i) e_i \|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \cdot \| e_i \| \to 0 (m\to\infty)$$

所以 Y 是完备的。 □

（*）关于(5—15)式的证明如下：

记 $s=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)}|$，若 $s=0$，任取 $C>0$ 即可。当 $s>0$ 时，

令 $\beta_i=\dfrac{\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)}}{s}, i=1,2,\cdots,n$，则(5－15)式等价于

$$\| \sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i \| \geqslant C > 0, \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = 1\right)$$

如使上式中大于 0 的 C 不存在，即

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i \mid \beta_i\in\mathbf{R}, 1\leqslant i\leqslant n, \sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = 1\right\}=0$$

则存在 $\beta_i^{(m)}\in\mathbf{R}, i\leqslant n, \sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}|=1, m=1,2,\cdots$，使得

$$u_m=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(m)}e_i, \| u_m \| \to 0(m\to\infty)$$

因 $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}|=1$，故 $|\beta_i^{(m)}|\leqslant 1, i\leqslant n, m=1,2,\cdots$. 所以，每个 $\{\beta_i^{(m)}\}$ 为有界序列，由 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{\beta_i^{(m)}\}$ 有收敛子列 $\{\beta_i^{(m_1)}\}$，记 $\{y_{1,m}\}$ 为 $\{y_m\}$ 的对应于 $\{m_1\}$ 的子列，同样考虑 $\{\beta_2^{(m_1)}\}$（为 $\{\beta_2^{(m)}\}$ 的子列)，有收敛子列 $\{\beta_2^{(m_2)}\}$，记 $\{y_{2,m}\}$ 为 $\{y_{1,m}\}$ 的相应的子序列，依此下去，得 $\{y_{n,m}\}$，

$$y_{n,m}=\sum_{i=1}^{n}r_i^{(m)}e_i, \sum_{i=1}^{n}|r_i^{(m)}|=1$$

其中 $r_i^{(m)} \to r_i, (m \to \infty), i = 1,2,\cdots,n$. 记 $y = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$，则

$$\| y_{n,m} - y \| \to 0 (m \to \infty)$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} |r_i| = 1$，r_i 不全为零，又 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 线性无关，故 $y = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \neq 0$. 另一方面，由

$$| \| y_{n,m} \| - \| y \| | \leqslant \| y_{n,m} - y \| \to 0$$

有 $\lim_{n\to\infty} \| y_{n,m} \| = \| y \|$，而 $\{y_{n,m}\}$ 为 $\{y_m\}$ 的子列，由 $\lim_{m\to\infty} u_m = 0$，知 $\| y \| = \lim_{m\to\infty} \| y_{n,m} \| = 0$，由范数的定义知 $y = 0$. 矛盾。故(5－15) 式成立。

易知完备距离空间 X 的子空间 Y 是完备的，当且仅当 Y 是闭的。

推论 5.7　赋范空间 X 的每个有限维子空间是 X 中的闭集。

定义 5.7　称线性空间 X 上的两个范数 $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ 是等价的，如果存在正常数 c, d，使得 $\forall\ x \in X$ 有

$$c \| x \|_2 \leqslant \| x \|_1 \leqslant d \| x \|_2$$

注　X 上的等价范数诱导出 X 上的同一拓扑(证明留给读者)。

定理 5.8　有限维线性空间上的任意两个范数都是等价的。

证明　设赋范空间 X 是 n 维的，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为其一组基。$\forall\ x \in X$，存在唯一的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}$，使得 $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$，设 $\| \cdot \|_1$ 和 $\| \cdot \|_2$ 为 X 上的两个范数，由(5－15) 式，存在正常数 C，使得 $\| x \|_1 \geqslant C \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. 另一方面，由三角不等式得

$$\| x \|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \| e_i \|_2 \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

其中 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\|e_i\|_2\}$，于是

$$\|x\|_1\geqslant\frac{C}{M}\|x\|_2$$

同理可证：存在 $d>0$，使得

$$\|x\|_x\leqslant d\|x\|_2$$

所以，$\|\cdot\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 是等价的。 □

§5.2 线性算子与线性泛函

§5.2.1 线性算子与线性泛函的概念

在微积分中，研究的是实数空间上的实值函数，而在泛函分析中，考虑的是一般度量空间与赋范线性空间中的映射。在线性空间之间的映射，常称为算子。所谓线性算子，是较简单的一类，也是非常重要的一类算子。

定义 5.8 设 X 和 Y 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的两个线性空间，D 是 X 的线性子空间，映射 $T:D\to Y$，若 $\forall\ x,y\in D,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

则称 T 是**线性算子**。取值为实数或复数的线性算子分别称为实的或复的**线性泛函**。记 $\mathrm{dom}(T)$ 为 T 的定义域，$\mathrm{rng}(T)$ 为 T 的值域，$Tx=T(x)$. 称 $N(T)=\{x\in D|Tx=\theta\}$ 为 T 的零空间，其中 θ 为 Y 中的零元素。

例 5-12 **恒等算子** $I:X\to X$ 定义为 $Tx=x$，对一切 $x\in X$；零算子 $\Theta:X\to Y$ 定义为 $\Theta x=\theta,\forall\ x\in X$；**微分算子**：设 X 是$[a,b]$上多项式全体，$T_1:X\to X$ 定义为$(T_1x)(t)=x'(t),\forall\ t\in[a,b]$. **积分算子** $T_2:C([a,b])\to C([a,b])$ 定义为 $(T_2x)(t)=$

$\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau, t \in [a,b]$. 则 I, Θ, T_1, T_2 都是线性算子。

设 T 是线性算子,则不难验证:

(1) 值域 $\mathrm{rng}(T)$ 是线性空间。这是因为 $\forall\ y_1, y_2 \in \mathrm{rng}(T)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ 有 $x_i \in \mathrm{dom}(T)$,使得 $Tx_i = y_i, i = 1,2$,从而 $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. 因 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathrm{dom}(T)$,故 $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathrm{rng}(T)$.

(2) 如果 $\dim(\mathrm{dom}(T)) = n < \infty$,则 $\dim(\mathrm{rng}(T)) \leqslant n$. 这只需验证 $\forall\ y_1, y_2, \cdots, y_{n+1} \in \mathrm{rng}(T)$, $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ 线性相关。事实上,因 $y_i \in \mathrm{rng}(T)$,故存在 $x_i \in \mathrm{dom}(T)$,使得 $y_i = Tx_i, i = 1, \cdots, n+1$,由于 $\dim(\mathrm{dom}(T)) = n$,故存在不全为 0 的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$,使得 $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$. 从而

$$0 = T\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y_i$$

可见 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ 是线性相关的。

(3) 由于当 $Tx_i = 0, i = 1, 2$ 时,有 $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 = 0$ 所以 $N(T)$ 是线性空间。

§ 5.2.2 有界线性算子及其性质

定义 5.9 称算子 $T: X \to Y$ 为**有界算子**,如果 T 将 X 中任何有界集映到 Y 中的有界集。不是有界的算子就称为**无界算子**。

定理 5.9 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子,则 T 为有界算子的充分必要条件是:存在 $M > 0$,使得 $\forall\ x \in X$ 有

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \tag{5-16}$$

证明 设 T 是有界线性算子,则 T 把 X 中单位球 $S =$

$\{x \mid \|x\| = 1, x \in X\}$ 映成 Y 中有界集，故存在 $M \geqslant 0$，使得 $\|Ty\| \leqslant M(\forall y \in S)$，从而当 $x = 0$ 时，有 $\|Tx\| = 0 \leqslant M\|x\|$．任取 $M \geqslant 0$ 即可。当 $x \neq 0$ 时，令 $y = \frac{x}{\|x\|} \in X$，则 $\|y\| = 1$，故 $y \in S$，从而有

$$\left\|T \frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M$$

于是 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$，(5－16)式成立。

反之，如果存在常数 $M>0$，使得 $\forall x \in X$，有 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$．设 A 为 X 的一有界子集，则存在常数 $K>0$，使得 $\|x\| \leqslant K(\forall x \in A)$，从而 $\forall x \in A$ 有

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\| \leqslant MK$$

故 $T(A)$ 为 Y 的有界子集。可知 T 为有界线性算子。 □

根据定理 5.9，有时把(5－16)式作为线性算子 T 是有界算子的定义。

从(5－16)式，对有界线性算子 T，当 $x \neq 0$ 时，有 $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant C$. 令

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathrm{dom} T, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

则 $\|T\|$ 满足范数的定义。事实上，$\|\Theta\| = 0$(零算子的范数为 0)。又当 $\|T\| = 0$ 时，有 $\forall x \in \mathrm{dom}(T)$，$Tx = 0$ 故 $T = \Theta$. $\forall \alpha \in \mathbf{R}$，

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

故

$$\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$$

如果 T_1, T_2 是两个有界线性算子，则

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|$$

故 $\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$.

记 $L(X,Y)$ 为 X 到 Y 的有界线性算子全体，对 $T_1, T_2 \in L(X,$

$Y)$，$\alpha \in \mathbf{R}$ 令

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x$$

$$(\alpha T_1)(x) = \alpha T_1 x$$

以 $\| T \| = \sup\limits_{x \in \mathrm{dom}(T), x \neq 0} \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|}$ 定义 T 的范数，则 $(L(X,Y),$ $\| \cdot \|)$ 成为赋范线性空间。

例 5-13（积分算子） 定义积分算子 $T: C([0,1]) \to C([0,1])$ 如下：$\forall\ x \in C([0,1])$，令

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t,\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau$$

其中 $k(t,\tau)$ 是一给定的函数，在 $[0,1] \times [0,1]$ 上连续，则 T 是有界线性算子。

证明 由积分的线性性知 T 是线性算子。因 $k(t,\tau)$ 在有界闭区域上连续，故 k 在 T 上有界，即存在 $k_0 > 0$，使得 $\forall\ (t,\tau) \in [0,1] \times [0,1]$，$|k(t,\tau)| \leqslant k_0$. 注意到例 5-5 中 $C([a,b])$ 中范数的定义，有

$$\begin{aligned}
\| Tx \| &= \max_{t \in [a,b]} \left| \int_0^1 k(t,\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau \right| \\
&\leqslant \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant k_0 \int_0^1 |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant k_0 \| x \|
\end{aligned}$$

可见 T 是有界的。 □

例 5-14（矩阵算子） 设实矩阵 $A = (a_{ij})_{r \times n}$，定义算子 $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$，$y = Ax \ (x \in \mathbf{R}^n)$，则 T 是有界线性算子。

证明 线性性留给读者验证，现证有界性。

$\mathbf{R}^n$ 上范数定义为：$\| x \|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$，其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$，类似地定义 $\mathbf{R}^r$ 上的范数。$\forall\ x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$，由 Cauchy-

Schwarz 不等式，

$$\|Tx\|_2^2=\sum_{j=1}^{r}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\xi_i\right\}^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{r}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$=\|x\|_2^2\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2$$

记 $C^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2\geqslant 0$，则 $\|Tx\|_2\leqslant C\|x\|_2$，故 T 是有界的。

□

例 5-15 设 $L^1([a,b])$ 是 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积函数的全体。对 $f\in L^1([a,b])$，令 $(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 T 可视为 $L^1([a,b])\to C([a,b])$ 或 $L^1([a,b])\to L^1([a,b])$ 的线性算子。因 $C([a,b])$ 上范数是 $\|f\|_\infty=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$，而 $L^1([a,b])$ 上范数为 $\|f\|_{L^1}=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$，故 $\|T\|$ 的计算也不一样。

当视 $T:L^1([a,b])\to C([a,b])$ 时，$\forall f\in L^1([a,b])$，如果 $\|f\|_{L^1}=1$，则

$$\|Tf\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=1$$

故 $\|T\|\leqslant 1$. 另一方面，对 $f_0(t)=\dfrac{1}{b-a}$，$t\in[a,b]$，有

$$\|f_0\|_{L^1}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{b-a}=1,\ \|Tf_0\|_{L^1}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{b-a}\right|=1$$

所以 $\|T\|=\sup\limits_{\|f\|_{L^1}=1}\|Tf\|_C\geqslant\|Tf_0\|_C=1$，故 $\|T\|=1$.

如果视 $T:L^1([a,b])\to L^1([a,b])$，则 $\|T\|=b-a$. 事实上，$\forall\ f\in L^1[a,b]$，且 $\|f\|_{L^1}=1$，则

$$\|Tf\|_{L^1}=\int_a^b\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\|f\|_{L^1}\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)\|f\|_{L^1}$$

故 $\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面，对 $n\geqslant\frac{1}{b-a}$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}n,x\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]\\0,x\in\left(a+\frac{1}{n},b\right]\end{cases}$$

则

$$\|f_n\|_{L^1}=1$$

$$\|Tf_n\|=\int_a^b\int_a^x|f_n(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(x-a)\mathrm{d}x+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\cdot\mathrm{d}x=b-a-\frac{1}{2n}$$

因此，$\|T\|=\sup\limits_{\|f\|_{L^1}=1}\|Tf\|_{L^1}\geqslant b-a$，所以，$\|T\|=b-a$. □

从上例可看出，算子范数与取值空间的范数有关。

设 X 与 Y 均为赋范线性空间，如果当 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$ 时，有 $\|Tx_n-Tx\|\to 0(n\to\infty)$，则称 T 是**连续算子**。

定理 5.10　线性算子 $T:X\to Y$ 是有界的，当且仅当 T 是连续算子。

证明　设 T 是有界线性算子，则存在常数 $C\geqslant 0$，使得 $\|Tx\|\leqslant C\|x\|$ $(\forall\ x\in X)$. 设 $\|x_n\|\to 0(n\to\infty)$，则 $\|Tx_n\|\leqslant C\|x_n\|\to 0(n\to\infty)$，故 T 在 $x=0$ 连续。$\forall\ x_0\in X$，如果 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则

$$\|Tx_n-Tx_0\|=\|T(x_n-x_0)\|$$

$$\leqslant C\|x_n - x_0\| \to 0(n\to\infty)$$

故 T 在 x_0 连续，从而知 T 在 X 上连续。

反之，当线性算子 T 在 X 上连续时，$\forall\, x_0\in X$，T 在 x_0 连续，从而 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon,(\|x - x_0\| < \delta, x\in X) \tag{5-17}$$

任取 $y\in X$，$y\neq\theta$，记 $x=x_0+\frac{\delta}{\|y\|}y$，则 $x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y$，$\|x-x_0\|=\delta$，由(5－17)式，

$$\varepsilon > \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\|$$

$$= \|T(\frac{\delta}{\|y\|}y)\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|T(y)\|$$

$\|Ty\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$，由定理 5.9 知 T 是有界线性算子。 □

因线性泛函是$(X,\|\cdot\|)\to(\mathbf{R},|\cdot|)$的线性算子，故上述结论对线性泛函亦真。特别，对线性泛函，有

定理 5.11　设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，f 是 X 上线性泛函，则 f 在 X 上连续的充要条件是 f 的零空间 $N(f)=\{x\mid f(x)=0\}$为 X 中的闭子空间。

证明　设线性泛函 f 在 X 上连续，$\forall\, x_1,x_2\in N(f)$，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$f(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)=0$，因此 $\alpha x_1+\beta x_2\in N(f)$，所以，$N(f)$是 X 的子空间。又设 $x_n\in N(f)$，$n=1,2,\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，因 f 连续，$f(x_0)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，故 $x_0\in N(f)$，所以 $N(f)$是闭子空间。

当 $N(f)$是 X 的闭子空间时，因 $f(\theta)=0$，且当 $x_n\to\theta(n\to\infty)$时，$f(x_n)\to f(\theta)=0$，故 f 在 $x=\theta$ 处连续，由 f 的线性性，$\forall\, x_0\in X$，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，$|f(x_n)-f(x_0)|=|f(x_n-x_0)|\to f(\theta)=0(n\to\infty)$，故 f 在 X 上连续。 □

关于有限维空间上的线性算子与线性泛函，有

定理 5.12　设 X 与 Y 都是实数域上的有限维线性空间，则 X 到 Y 的每个线性算子 T 是有界的。

证明　设 $\dim X=n, E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是其一组基，$\forall\ x\in X, x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，

$$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(e_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\cdot\|T(e_i)\|$$

$$\leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|T(e_i)\|)\cdot\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

由定理 5.6 的(5－15)式知，存在常数 $C>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leqslant \frac{1}{C}\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\| = \frac{1}{C}\|x\|$$

令 $d=\frac{1}{C}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|T(e_i)\|$，$d$ 与 x 无关，从而

$$\|Tx\| \leqslant d\|x\|\ (\forall\ x\in X)$$

故 T 是有界的。　□

§5.2.3　算子空间与共轭空间

设 X 与 Y 均为赋范线性空间，记 X 到 Y 的有界线性算子全体为 $\mathscr{B}(X,Y)$，前已定义算子加法与数乘算子，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 在算子范数的定义下是赋范线性空间。

定义 5.10　设 X 是赋范线性空间，X 上的连续线性泛函全体记为 X^*，按通常泛函的线性运算与泛函的范数，$(X^*,\|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间，称为 X 的**共轭空间**。

设 X 是赋范线性空间，$A,B\in\mathscr{B}(X,X)$，定义 $AB: X\to X$ 如下：

$$(AB)(x) = A(Bx)(x\in X)$$

则 $AB\in\mathscr{B}(X,X)$. 而且，由

$$\|ABx\| \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

知 $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

定义 5.11 设 $\mathscr{B}$ 是一个完备的赋范线性空间，如在 $\mathscr{B}$ 上还定义了乘法运算 $x \cdot y(x,y\in\mathscr{B})$ 满足：$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$，则称 $\mathscr{B}$ 是 Banach 代数。

定理 5.13 设 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间。

证明 只需证明 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的完备性。设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的 Cauchy 列，即 $\forall\ \varepsilon>0$，存在正整数 N 使得

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad (m,n > N)$$

因为 $\forall\ x\in X$，$\|T_nx-T_mx\| = \|(T_n-T_m)x\| \leqslant \|T_n-T_m\| \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon\|x\|\ (n,m>N)$，所以 $\{T_nx\}$ 是 Y 中 Cauchy 列。因 Y 是 Banach 空间，故 Y 是完备的，从而存在唯一的 $y\in Y$，使得 $\|T_nx-y\| \to 0(n\to\infty)$. 令 $Tx=y$，则 T 是 $X\to Y$ 的线性算子，且 $\forall\ x\in X$，有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leqslant \|Tx - T_nx\| + \|T_nx\| \\ &= \|(T - T_n)x\| + \|T_nx\| \end{aligned} \qquad (5-18)$$

又当 $n > N$ 时，$\|(T - T_n)x\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$，而 T_n 为有界线性算子，故存在常数 $C_n > 0$，使得 $\|T_nx\| \leqslant C_n\|x\|\ (\forall\ x \in X)$，从而由 (5－18) 式，$\|Tx\| \leqslant (\varepsilon + C_n)\|x\|\ (n > N)$. 可见 T 是有界的，因此 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 因为 $\forall\ \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，

$$\begin{aligned}\|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T - T_n)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\|\end{aligned}$$

所以 $\|T_n-T\| \to 0(n\to\infty)$，故 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是完备的。 □

因为 **R** 是完备的，根据定理 5.13，所以赋范线性空间的共轭空间 X^* 是 Banach 空间。

有限维线性空间上的线性算子与线性泛函的特征如何呢？

设 X 和 Y 分别是 n 维和 m 维赋范线性空间，$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 X 的一组基，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$ 为 Y 的一组基，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，$\forall\ x\in X$，则 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$. 因 T 是线性的，所以 $Tx=\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i$. 由于 $Te_i\in Y$，故 $Te_i=\sum_{j=1}^{m}\eta_{ij}b_j$，$i=1,2,\cdots,n$，从而

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\eta_{ij}b_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\eta_{ij}\xi_i b_j$$

令 $A_T=(\eta_{ij})_{n\times m}$，则

$$Tx=A_T x$$

当 X 与 Y 的基确定后，X 到 Y 的每个有界线性算子 T 唯一对应着一个 $m\times n$ 阶矩阵 A_T 使得

$$Tx=A_T x(x\in X)$$

关于有限维赋范线性空间 X 上线性泛函全体，即 X 的共轭空间 X^*，我们有

定理 5.14　设 n 维赋范线性空间 X 的一组基为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则 $\dim X^*=\dim X=n$，且

$$f_k(e_j)=\delta_{jk}=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k\end{cases}$$

$k=1,2,\cdots,n$ 为 X^* 的一组基。

证明　首先证明 $L=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是线性无关集。因为若

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k=0,$$

即 $\forall\ x\in X$，$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(x)=0$，则取 $x=e_i$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(e_i)=0, i=1,2,\cdots,n$$

而 $f_k(e_i)=\delta_{ik}$，于是 $0=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(e_i)=\alpha_i, i=1,2,\cdots,n$，故 L 是线性无关集。

其次，$\forall\ x\in X$，记 $f(e_k)=\beta_k$，$\forall\ x\in X, x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\beta_k$，而

$$f_k(x)=f_k\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_k(e_i)=\xi_k$$

故

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k f_k(x)$$

从而，$f=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k f_k$. 因此，$L$ 构成 X^* 的一组基，可见 $\dim X^*=n$.

□

§ 5.2.4 $\mathbf{R}^n, l^1, l^p$ 上连续线性泛函的表示

在定义 5.6 中，介绍了两个赋范线性空间等距同构的概念。若两个赋范线性空间等距同构，则将其同一化而不加区别，以下的线性泛函的表示及共轭空间都是建立在等距同构的基础之上。

定理 5.15 $\mathbf{R}^n$ 的共轭空间是 $(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$.

证明 由定理 5.14 知，$\forall\ f\in(\mathbf{R}^n)^*$，$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)$，$(x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n)$，其中 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基，$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'$. 记 $\beta_i=f(e_i), i=1,2,\cdots,n$，$\beta_f=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)'$. 作映射 $U:(\mathbf{R}^n)^*\to\mathbf{R}^n$，$Uf=\beta_f$，由 Cauchy 不等式有

$$|f(x)|=\Big|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\beta_i\Big|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| x \| \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| x \| \cdot \| \beta_f \|$$

故 $\| f \| \leqslant \| \beta_f \|$，又当 $x = \beta_f$ 时，$|f(x)| = \| x \| \cdot \| \beta_f \|$，从而令 $y = \dfrac{\beta_f}{\| \beta_f \|}$，则 $\| y \| = 1$，$|f(y)| = \| \beta_f \|$，故 $\| f \| = \| \beta_f \|$，从而有 $\| Uf \| = \| \beta_f \| = \| f \|$，可见 U 是等距的。易证 U 是线性的双映射，所以 $(\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$. □

空间 l^1 是满足 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$ 的数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 全体按通常线性运算和范数 $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$ 所成的 Banach 空间（完备性的证明见例 5-9）。l^∞ 是有界数列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 全体按通常线性运算和范数 $\| x \|_\infty = \sup_i |x_i|$ 所成的 Banach 空间。

定理 5.16 l^1 的共轭空间 $(l^1)^* = l^\infty$.

证明 考虑 l^1 中元素 $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^{\infty}$，$k = 1, 2, \cdots$，$\forall\, x \in l^1$，$x = (x_1, x_2, \cdots)$，

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0 (n \to \infty)$$

故 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

$\forall\, f \in (l^1)^*$，记 $\gamma_k = f(e_k)$，$k = 1, 2, \cdots$，$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots)$，则 $\gamma \in l^\infty$. 事实上，$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqslant \| f \| \cdot \| e_k \| = \| f \|$，$k = 1, 2, \cdots$. 故 $\| \gamma \|_\infty = \sup_k |\gamma_k| \leqslant \| f \|$，所以 $\gamma \in l^\infty$. $\forall\, x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$，有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k \qquad (5-19)$$

另一方面，$\forall\, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots) \in l^\infty$，对每个 $x \in l^1$，按 (5 − 19) 式定义了 l^1 上一个线性泛函 f，且由 $|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |\gamma_k| \leqslant$

$\|\gamma\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|\gamma\|_\infty \|x\|$ 知，f 是有界线性泛函。

作映射 $\sigma:(l^1)^* \to l^\infty$，$\sigma(f)=\gamma$，其中 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots)$，$\gamma_k = f(e_k)$，$k=1,2,\cdots$，则 σ 是 $(l^1)^* \to l^\infty$ 的同构映射，且 $\forall f \in (l^1)^*$，$\|\sigma(f)\| = \|f\|$，后者是因为 $\forall x \in l^1$，

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k\right| \leqslant \|\gamma\|_\infty \|x\|_1$$

故 $\|f\| \leqslant \|\gamma\|_\infty$。又因为 $\|\gamma\|_\infty = \sup\limits_k |\gamma_k|$，故 $\forall n \in \mathbf{N}$，存在 γ_{k_n}，使得 $|\gamma_{k_n}| > \|\gamma\|_\infty - \frac{1}{n}$，从而 $|f(e_{k_n})| = |\gamma_{k_n}| \cdot 1 > \|\gamma\|_\infty - \frac{1}{n}$，而 $\|e_{k_n}\|_1 = 1$，故 $\|f\| = \|\gamma\|_\infty = \|\sigma(f)\|$，因此，$(l^1)^* = l^\infty$。 □

定理 5.17 $l^p(p>1)$ 的共轭空间 $(l^p)^* = l^q$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明 取 $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^\infty$，$k=1,2,\cdots$。$\|e_k\|_p = 1$，故 $e_k \in l^p$，$k=1,2,\cdots$。$\forall x = (x_1,x_2,\cdots) \in l^p$，$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 (n \to \infty)$，故 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$。

$\forall f \in l^p$，记 $\beta_k = f(e_k)$，$k=1,2,\cdots$，$\beta = (\beta_1,\beta_2,\cdots)$，则 $\beta \in l^q$。这是因为，若取

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\beta_k^q|/\beta_k, & k \leqslant n \text{ 且 } \beta_k \neq 0, \\ 0, & k > n \text{ 或 } \beta_k = 0 \end{cases}$$

$x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^\infty$，则

$$\|x_n\|_p \leqslant \left(\sum_{\substack{\beta_k \neq 0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \left(\frac{|\beta_k|^q}{|\beta_k|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

故 $x_n \in l^p$。而

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\beta_k=\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q$$

又

$$|f(x_n)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_n\|_p$$

$$=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}|\beta_k^q|\leqslant\|f\|\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

从而

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\|\beta\|_q=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\| \qquad (5-20)$$

故 $\beta\in l^q$，又 $\forall\ x\in l^p, x=(x_1,x_1,\cdots)$，则 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k$，由 f 的线性性，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\beta_k \qquad (5-21)$$

给定 $f\in(l^p)^*$，存在唯一的 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^q$，使得(5－20)式成立。反之，$\forall\ \beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^q$，按(5－21)式，可定义 l^p 上一个线性泛函，由 Holder 不等式

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|x\|_p\|\beta\|_q \qquad (5-22)$$

故 f 为 l^p 上有界线性泛函。

作映射 $\tau:(l^p)^*\to l^q$，$\forall\ f\in(l^p)^*$，$\tau(f)=\beta$，β 如上所述，则由(5－20)与(5－22)两式知 $\|f\|=\|\beta\|_\infty=\|\tau(f)\|$，且知 τ 为线性双射，故 $(l^p)^*=l^q$.

□

对于进一步的赋范线性空间的有界线性泛函的表示与结构的研究，需要 Banach 空间的一些重要的基本定理。我们在下一节中进行讨论。

§ 5.3 Banach 空间的基本定理与应用

本节主要介绍赋范线性空间和 Banach 空间中的四个基个定理，即线性泛函延拓定理，一致有界原理，开映像定理和闭图像定理。其中线性泛函延拓定理被称为泛函分析的基石。该定理有许多重要的应用，如利用它可得到 $C([a,b])$ 上有界线性泛函的表示，可得到伴随算子的有关结论。而一致有界原理给出了有界线性算子序列 $\{T_n\}$ 有界的充分条件，它已被应用于 Fourier 级数及其收敛性，数值积分等领域中。Banach 空间的不动点定理及应用也将是本节的内容。

§ 5.3.1 线性泛函延拓定理

定义 5.12 度量空间 (X,d) 被称为可分的，如果存在 X 的可数子集 M，使得 $\overline{M}=X$，其中 $\overline{M}$ 为 M 的闭包。

定义 5.13 线性空间 X 上的一实值泛函 p 称为次线性泛函，如果 p 是次可加的，即满足

(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y), \forall\ x,y\in X$;

(2) $p(\alpha x)=\alpha p(x), \forall\ \alpha\geqslant 0, x\in X$.

定理 5.18 Hahn-Banach **定理** 设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的赋范线性空间，p 是 X 上的连续次线性泛函，f 是定义在 X 的子空间 M 上的线性泛函且满足 $|f(x)|\leqslant p(x)(\forall\ x\in M)$，则存在 X 上的线性泛函 F，使得 $|F(x)|\leqslant p(x)(\forall\ x\in X)$，且 $F|_M=f$.

证明 此定理对任意赋范线性空间都成立，我们只对 X 为可分空间的情况给出证明。这里，所谓 X 为可分空间是指存在 X 的可数子集 A，使得 $\overline{A}=X$. 不可分时用 Zorn 引理，见[8].

设 $x_0\in X\setminus M$，记$[M+x_0]=y+tx_0, y\in M, t\in\mathbf{R}$. 假设存在线性泛函 $F_1:[M+x_0]\to\mathbf{R}$，使得 $F_1(x)\leqslant p(x)(\forall\ x\in[M+x_0])$ 且 $F_1|_M=f$，F_1 应满足什么条件呢？因$\forall\ x\in[M+x_0]$，有 $x=y+tx_0$，$y\in M, t\in\mathbf{R}$，$F_1(x)=F_1(y+tx_0)=F_1(y)+tF_1(x_0)=f(y)+tF_1(x_0)$. 记 $\alpha_0=F_1(x_0)$. 当 $t\geqslant 0$ 时，由 $F_1(x)\leqslant p(x)(\forall\ x\in[M+x_0]$，知

$$f(y)+t\alpha_0\leqslant p(y+tx_0)$$

从而

$$\alpha_0\leqslant -f(\frac{y}{t})+p(\frac{y}{t}+x_0)$$

因$\frac{y}{t}\in M$，故需

$$\alpha_0\leqslant -f(y_1)+p(y_1+x_0)(\forall\ y_1\in M)\qquad(5-23)$$

当 $t<0$ 时，记 $u=-t>0$. 由 $F_1(x)\leqslant p(x)$ 知 $f(y)-u\alpha_0\leqslant p(y-ux_0)$，从而有 $\alpha_0\geqslant f(\frac{y}{u})-p(\frac{y}{u}-x_0)$，因$\frac{y}{u}\in M$ 故需

$$\alpha_0\geqslant f(y_2)-p(y_2-x_0)(\forall\ y_2\in M)\qquad(5-24)$$

由(5－23)式和(5－24)式，α_0 需满足

$$f(y_2)-p(y_2-x_0)\leqslant -f(y_1)+p(y_1+x_0)(\forall\ y_1,y_2\in M)$$

这样的 α_0 是否存在？注意到$\forall\ y_1,y_2\in M$，$f(y_1+y_2)\leqslant p(y_1+x_0-x_0+y_2)\leqslant p(y_1+x_0)+p(y_2-x_0)$，又 $f(y_1+y_2)=f(y_1)+f(y_2)$，故

$$f(y_2)-p(y_2-x_0)\leqslant p(y_1+x_0)-f(y_1)(\forall\ y_1,y_2\in M)$$

从而

$$\sup_{y\in M}\{f(y)-p(y-x_0)\}\leqslant\inf_{y\in M}\{p(y+x_0)-f(y)\}$$

取 α_0 使得 $\sup\limits_{y\in M}\{f(y)-p(y-x_0)\}\leqslant \alpha_0\leqslant \inf\limits_{y\in M}\{p(y+x_0)-f(y)\}$ 即可。

因为 X 可分，故存在可数稠密集 $\{y_1,y_2,\cdots\}$，从 $\{y_1,y_2,\cdots\}$ 中选出子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，使得 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 本身为线性无关组，且与 M 线性无关，再与 M 一起生成在 X 中稠密的子空间 Q.

根据前述方法，将 f 从 M 延拓到 $[M+x_0+x_1]$，再延拓到 $[M+x_0+x_1+x_2]$，依此下去，可将 f 延拓到 Q，记为 F_Q. 由 $|F_Q(x)|\leqslant p(x)(\forall\ x\in Q)$ 及 p 的连续性知 F_Q 在 Q 上连续。$\forall\ x\in X$，存在 $x_n\in Q, n=1,2,\cdots$, $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$，令 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_Q(x_n)$. 这个极限的存在是因为 $|F_Q(x_n)-F_Q(x_m)|\leqslant \|F_Q\|\ \|x_n-x_m\|$. 可知 $F(x)$ 的定义不依赖于 x_n 的选取，因为若 $x_n'\subseteq Q$, $\|x_n'-x\|\to 0(n\to\infty)$，则 $|F_Q(x_n')-F_Q(x_n)|=|F_Q(x_n'-x_n)|\leqslant \|F_Q\|\cdot\|x_n'-x_n\|\leqslant \|F_Q\|\ \|x_n'-x\|+\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$。 □

推论 5.19　设 f 是赋范线性空间 X 的子空间 M 上的有界线性泛函，则存在 X 上的有界线性泛函 F，使得 $\|F\|_X=\|f\|_M$, $F|_M=f$，其中 $\|F\|_X=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}|F(x)|$, $\|f\|_M=\sup\limits_{x\in M,\|x\|=1}|f(x)|$.

证明　在定理 5.18 中，取 $p(x)=\|f\|_M\|x\|$ 即可。 □

推论 5.20（**有界线性泛函**）　设 X 是赋范线性空间，$x_0\neq 0$ 是 X 的任意一元，则存在 X 上的有界线性泛函 F，使得 $\|F\|=1$, $F(x_0)=\|x_0\|$.

证明　考虑 X 的子空间 $M=\{\alpha x_0|\alpha\in\mathbf{R}\}$. 在 M 上，定义线性泛函 f, $f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$，则由 $|f(\alpha x_0)|=\|\alpha x_0\|$ 及 $x_0\neq 0$ 知 $\|f\|=1$. 由推论 5.19，存在 X 上的有界线性泛函 F，使得 $\|F\|_X=\|f\|_M=1$, $F|_M=f$，从而 $F(x_0)=f(x_0)=\|x_0\|$.

□

由推论 5.20 易得

推论 5.21　对赋范线性空间 X 中每一个 x，有

$$\| x \| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\| f \|}$$

当 $x_0 \in X$ 满足 $\forall\ f\in X^*, f(x_0)=0$ 时，有 $x_0=\theta$.

证明　记 $x_0 = x$，由推论 5.20，

$$\sup_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\| f \|} \geqslant \frac{|F(x)|}{\| F \|} = \| x \|$$

其中 F 为推论 5.20 中的线性泛函。又 $|f(x)| \leqslant \| f \| \cdot \| x \|$，故有

$$\sup_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\| f \|} \leqslant \| x \| \qquad \square$$

线性泛函延拓定理 5.18 及其推论 5.20 有许多重要应用，下面介绍两个典型应用的例子。

第一个例子是关于 $C([a,b])$ 上的线性泛函的表示问题。为此，先介绍有界变差函数的概念，定义在 $C([a,b])$ 上的函数 w 称为有界变差函数，如果

$$\mathrm{Var}(w) \triangleq \sup \sum_{i=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| < \infty$$

其中上确界是对区间 $[a,b]$ 的一切分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

和 $\forall\ n\in \mathbf{N}$ 而取。以 $BV[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上有界变差函数全体所成空间，$\forall\ w\in BV[a,b]$ 令

$$\| w \| = |w(a)| + \mathrm{Var}(w)$$

则可验证 $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间。回忆第三章关于 Riemann—Stieltjes 积分的概念，我们有

定理 5.22 (Riesz **定理**)　$\forall\ f\in C([a,b])^*$，存在唯一的 $w\in BV_0[a,b]$，($BV_0[a,b]$ 是 $BV[a,b]$ 中满足 $w(a)=0$ 的元素全体)使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}w(t)(\forall\ x\in C([a,b]))\qquad(5-25)$$

且 $\|f\|=\|w\|$.

证明 如果(5－25)式成立，我们看 $w(\xi)$ 应具有怎样的特征？易知

$$w(\xi)-w(a)=\int_{[a,\xi]}1\cdot\mathrm{d}w(t)=\int_a^b\chi_{[a,\xi]}(t)\mathrm{d}w(t)$$

其中

$$\chi_{[a,\xi]}(t)=\begin{cases}1, a\leqslant t\leqslant\xi\\0, \xi<t\leqslant b\end{cases}$$

$\chi_{[a,\xi]}$为$[a,b]$上有界函数。因此，首先必须将连续线性泛函 f 从 $C([a,b])\triangleq C$ 延拓到有界可积函数空间 $B([a,b])\triangleq B$ 上，其中 B 上范数定义为 $\|x\|=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|(x\in B)$这由推论 5.19 知$\forall\ f\in C([a,b])$，存在 $F\in B$，使得 $\|F\|=\|f\|$ 且 $F_C=f$.

对 $\chi_{[a,\xi]}\in B$ 记 $h(\xi)=F(\chi_{[a,\xi]})$，则可证：

(1) $h\in BV[a,b]$；

(2) 令 $w(x)=h(x)-h(a)$，有

$$F(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}w(t)(\forall\ x\in C([a,b]))$$

且 $\|f\|=\|w\|$，这里 $\|w\|=\mathrm{Var}(w)$.

由(1)，(2)，作映射 $T:C([a,b])^*\to BV_0[a,b]$，$Tf=w(\forall\ f\in C([a,b])^*)$，则知 T 为保范同构映射，因此 $C([a,b])^*=BV_0[a,b]$.

往证(1)，(2). 设$[a,b]$的一个分割为

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

记 $\delta_i=\mathrm{sgn}(h(t_i)-h(t_{i-1}))$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^n|h(t_i)-h(t_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \{h(t_i) - h(t_{i-1})\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \{F(\chi_{[a,t_i]}) - F(\chi_{[a,t_{i-1}]})\}$$

$$= F\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta_i (\chi_{[a,t_i]} - \chi_{[a,t_{i-1}]})\Big)$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} |h(t_i) - h(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \| f \| \cdot \Big\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i \{\chi_{[a,t_i]} - \chi_{[a,t_{i-1}]}\} \Big\| = \| f \| < \infty$$

从而 $\mathrm{Var}(h) \leqslant \| f \|$. 于是 $h \in BV[a,b]$,(1)得证。

至于(2),$\forall\, x \in C([a,b])$,取$[a,b]$的分割:$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,记 $\delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i - t_{i-1}|$,令

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i) [\chi_{[a,t_i]} - \chi_{[a,t_{i-1}]}(t)]$$

则

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i) (F(\chi_{[a,t_i]}) - F(\chi_{[a,t_{i-1}]}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x(t_i) (w(t_i) - w(t_{i-1}))$$

由于当 $\delta \to 0$ 时,$\| u - x \| = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t) - x(t)| \to 0$,故 $F(u) \to F(x)(\delta \to 0)$。由 Stieltjes 积分的定义,

$$\lim_{\delta \to 0} F(u) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} x(t_i) (w(t_i) - w(t_{i-1}))$$

$$= \int_a^b x(t) \mathrm{d} w(t)$$

所以

$$F(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} w(t)$$

由 Stieltjes 积分的性质知

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}w(t)\right| \leqslant \|x\| \operatorname{Var}(w)$$

故 $\|f\| = \|F\| \leqslant \operatorname{Var}(w)$. 由 $\operatorname{Var}(h)=\operatorname{Var}(w)$ 及(1)中证明的 $\operatorname{Var}(h)\leqslant \|f\|$ 知,$\operatorname{Var}(w)\leqslant \|f\|$. 所以 $\|f\| = \operatorname{Var}(w)$. □

第二个例子是关于所谓线性算子的伴随算子之范数。

定义 5.14 设 X 和 Y 是赋范线性空间,$T:X\to Y$ 是有界线性算子,则称算子 $T^*:Y^*\to X^*$,$\forall\, g\in Y$,$(T^*g)(x)=g(Tx)$($\forall\, x\in X$)为 T 的伴随算子,其中 X^*,Y^* 分别为 X 和 Y 的共轭空间。

定理 5.23 有界线性算子 T 的伴随算子 T^* 是有界线性算子,且 $\|T^*\| = \|T\|$.

证明 先证算子 T^* 是线性的。这是因为,Y^* 是线性空间,$\forall\, g_1,g_2\in Y^*$,$\alpha,\beta\in \mathbf{R}$,

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) = (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx)$$
$$= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx) = \alpha(T^* g_1)(x) + \beta(T^* g_2)(x)$$

其次,需要证明 $\|T^*\| = \|T\|$,由于 $\|T^* g\| = \|g(T)\| \leqslant \|g\| \cdot \|T\|$,故 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

另一方面,$\forall\, x_0\in X$,当 $\|Tx_0\| \neq 0$ 时,记 $y_0=Tx_0\neq 0$,由推论 5.20 知,存在 $g_0\in Y^*$,使得 $\|g_0\| =1$,$g_0(y_0)=y_0$. 由于 $T^* g_0 = g_0(T)$是 X 上有界线性泛函,所以 $\|T^* g_0\| \leqslant \|g_0\|\ \|T\|$,从而

$$\|Tx_0\| = \|y_0\| = \|g_0(y_0)\| = \|g_0(Tx_0)\|$$
$$= \|(T^* g_0)(x_0)\| \leqslant \|T^* g_0\| \cdot \|x_0\|$$
$$\leqslant \|T^*\|\ \|g_0\| \cdot \|x\| = \|T^*\| \cdot \|x_0\|$$

当 $T(x_0)=0$ 时,上式自动成立,因此 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. □

§ 5.3.2 一致有界原理

设 X 是 Banach 空间,Y 是赋范线性空间,$\{T_n, n\in \mathbf{N}\}$是 X 到

Y 的有界线性算子序列,如果$\forall\ x\in X,\{T_nx,n\in\mathbf{N}\}$是 Y 中有界集,即$\{T_nx,n\in\mathbf{N}\}$有界,要问$\{\|T_n\|,n\in\mathbf{N}\}$是否有界? 一致有界原理给出了肯定的回答。首先碰到这个问题的是 P. du Bois Reymond 在给出连续函数的 Fourier 级数发散的例子时。

记$(-\infty,+\infty)$上以 2π 为周期的连续函数全体为 $C_{2\pi}$,若 $x\in C_{2\pi}$,定义

$$\|x\| = \max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi}|x(t)|$$

则$(C_{2\pi},\|\cdot\|)$是 Banach 空间。而 $x(t)$的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (5-26)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,k=0,1,2,\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t,k=1,2,\cdots$$

Reymond 利用一致有界原理证明了:$\forall\ t_0\in\mathbf{R},x\in C_{2\pi}$,使得 x 的 Fourier 级数在 t_0 不收敛于 x, 即 $x(t_0)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt_0+b_k\sin kt_0)\right\}$,从而提醒人们,即使是连续函数,也不一定有 $x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),t\in(-\infty,\infty)$,具体的证明放到后面的例 5-17 中去。

定理 5.24 **(一致有界原理)** 设 X 是 Banach 空间,Y 是赋范线性空间,$T_n:X\to Y$ 是有界线性算子序列,如果 $\forall\ x\in X$, $\{\|T_nx\|,n\in\mathbf{N}\}$ 有界,则$\{\|T_n\|,n\in\mathbf{N}\}$ 也有界。

为了证明这个定理,我们先介绍下列重要的开映射原理和逆算子定理。

定义 5.15 设 X 和 Y 为度量空间,映射 $T:\mathrm{dom}(T)\to\mathrm{rng}$

$(T)\subseteq Y$(dom$(T)\subseteq X$ 为 T 的定义域)称为开映射，如果 T 将 dom(T)中开集映射到 rng(T)中开集。

定理 5.25 (**开映射原理**) 设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子且 $TX=Y$，则 T 是开映射。

证明略(可参见[2])

定理 5.26 (**逆算子定理**) 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，T 是 $X\to Y$ 的有界线性算子，且实现 X 到 Y 的一一对应，则逆算子 T^{-1} 必是有界线性算子。

证明 逆算子的存在性与线性性可直接验证。往证 T^{-1}的有界性。

因 $T:X\to Y$ 是有界线性算子，且 $TX=Y$，由开映射原理，对于 X 中开集 $S(0,1)=\{x|x\in X, \|x\|<1\}$，$TS(0,1)$是 Y 中开集，因 $0\in TS(0,1)$，故存在 $\varepsilon>0$，使得 $S(0,\varepsilon)\subset TS(0,1)$，于是有：$\forall y\in S(0,\varepsilon)$，$T^{-1}y\in S(0,1)$，即$\forall y\in Y$，$\|y\|<\varepsilon$，有 $\|T^{-1}y\|<1$. $\forall y\in Y$，当 $\|y\|\neq 0$ 时，令 $u=\dfrac{\varepsilon}{2\|y\|}y$，则 $\|u\|=\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，从而有 $\|T^{-1}u\|<1$. 由 T^{-1}的线性性，$\|T^{-1}u\|=\dfrac{\varepsilon}{2\|y\|}\|T^{-1}y\|<1$，所以有 $\|T^{-1}y\|\leqslant\dfrac{2}{\varepsilon}\|y\|$. 当 $\|y\|=0$ 时，$\|T^{-1}y\|=0$，从而亦有 $\|T^{-1}y\|\leqslant\dfrac{2}{\varepsilon}\|y\|$. 因此，$\|T^{-1}\|\leqslant\dfrac{2}{\varepsilon}<\infty$，$T^{-1}$是有界线性算子。 □

推论 5.27 设线性空间 X 上定义了两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，如果$(X,\|\cdot\|_1)$和$(X,\|\cdot\|_2)$都是完备的赋范线性空间，且 $\|\cdot\|_2$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 连续，即存在常数 $C_2>0$，使得 $\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1$，则 $\|\cdot\|_1$ 关于 $\|\cdot\|_2$ 也连续。

证明 设以 $\|\cdot\|_j$ 为范数的 Banach 空间 X 为 E_j，作恒等映射 $I:E_1\to E_2$，$I(x)=x$，由于 $\|x\|_2\leqslant C\|x\|_1$，故 I 是有界线性算子，由逆算子定理知，$I^{-1}:E_2\to E_1$ 也是有界线性算子，即存在常数

$C_1>0$，使得 $\|x\|_1\leqslant C_1\|x\|_2$，$(\forall x\in E_2)$. 故 $\|\cdot\|_1$ 关于 $\|\cdot\|_2$ 也连续。 □

逆算子定理在谱论研究中有重要的应用。

定理 5.24 的证明 在 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上定义另一个范数 $\|\cdot\|_1$ 如下，$\forall x\in X$，令

$$\|x\|_1=\max\{\|x\|,\sup_{n\geqslant 1}\|T_n x\|\}$$

则 $\|\cdot\|_1$ 也是 X 上的范数，且 $(X,\|\cdot\|_1)$ 为 Banach 空间。

事实上，由于 $\|x\|_1\geqslant\|x\|\geqslant 0$，且由于 $\{\|T_n x\|,n\in\mathbf{N}\}$ 是有界集，故 $\|x\|_1<\infty(\forall x\in X)$. 又由 $\|x\|_1=0\Rightarrow\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$. 而 $\forall\alpha\in\mathbf{R},x\in X$，$\|\alpha x\|_1=\max\{\|\alpha x\|,|\alpha|\sup_n\|T_n x\|\}=|\alpha|\|x\|_1$. 又 $\forall x,y\in X$，$\|T_k(x+y)\|\leqslant\|T_k x\|+\|T_k y\|\leqslant\sup_n\|T_n x\|+\sup_n\|T_n y\|$. 由此可知

$$\|x+y\|_1\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$$

设 $\{x_n\}\subseteq X$ 按 $\|\cdot\|_1$ 是 Cauchy 列，由 $\|x_n\|\leqslant\|x_n\|_1$ 故 $\{x_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 也是 Cauchy 列，而 $(X,\|\cdot\|)$ 是完备的，故存在 $x_0\in X$，使得 $\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\|x_n-x_m\|_1<\frac{\varepsilon}{2}(n,m>N)$. 从而有

$$\|x_n-x_m\|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ 及 }\|T_k(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2}(n,m>N)$$

令 $m\to\infty$，由 T_k 的连续性，$\|x_n-x_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，$\|T_k(x_n)-x_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ $(n>N)$，$k=1,2,\cdots$，$\|x_n-x_0\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(n>N)$. 所以，$\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty)$，可见 $(X,\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间。

由推论 5.27 知，存在常数 $C>0$，使得 $\|x\|_1<C\|x\|$ $(x\in X)$，即 $\max\{\|x\|,\sup_n\|T_n x\|\}\leqslant C\|x\|$，从而 $\sup_n\|T_n x\|\leqslant C\|x\|$，$\|T_n x\|\leqslant C\|x\|$，$n=1,2,\cdots$. 于是有 $\sup_n\|T_n\|\leqslant C$. □

下面，利用一致有界原理，证明连续函数的 Fourier 级数有发

散点。

例 5-16　对于任意 $t_0 \in \mathbf{R}$，存在 $x \in C_{2\pi}$ 使得 x 的 Fourier 级数在 t_0 处发散。

证明　不妨设 $t_0 = 0$（否则令 $u = t - t_0$ 即可）. 在 $C_{2\pi}$ 上，定义算子 $T_n : C_{2\pi} \to \mathbf{R}$ 如下：

$$T_n x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k, \forall\, x \in C_{2\pi}$$

利用 a_k 的表达式，可知

$$T_n x = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\pi \sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t$$

$$\| T_n x \| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\pi \sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |x(t)| \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\pi \sin t} \right| \mathrm{d}t$$

记 $C_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\pi \sin t} \right| \mathrm{d}t < \infty$，从而 $\| T_n x \| \leqslant C_n \| x \|$. 故 T_n 为有界线性算子，$\forall\, n \in \mathbf{N}$，如果 $\{ \| T_n x \| \}$ 为有界集，则由一致有界原理知 $\{T_n \|, n \in \mathbf{N}\}$ 为有界集。但是，可证明

$$\| T_n \| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\pi \sin t} \right| \mathrm{d}t \to \infty (n \to \infty) \qquad (*)$$

故必存在某个 $\tilde{x} \in C_{2\pi}$，使得 $\{ \| T_n \tilde{x} \|, n \in \mathbf{N} \}$ 是无界集，从而 $\tilde{x}$ 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

在 $t_0 = 0$ 处发散。

关于(*)式的证明:记 $p_n(t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\pi\sin t}$,则

$$\|T_n\| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p_n(t)|\mathrm{d}t$$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ x\in C_{2\pi},\ \|x\|=1$,使得

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[x(t)-\operatorname{sgn}(p_n(t))]p_n(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$$

从而,对这个 x,

$$\begin{aligned}|T_n(x)|&\geqslant-\left|T_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(p_n(t))p_n(t)\mathrm{d}t\right|\\&\quad+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(p_n(t))p_n(t)\mathrm{d}t\right|\\&>\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p_n(t)|\mathrm{d}t-\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0,|T_n(x)|\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p_n(t)|\mathrm{d}t$,又 $\|x\|=1$,故知 $\|T_n\|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|p_n(t)\mathrm{d}t$. 由于 $\left|\sin\frac{t}{2}\right|\leqslant\frac{t}{2},t\in[0,2\pi]$,则

$$\begin{aligned}\|T_n\|&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|\mathrm{d}t\\&>\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})t\right|}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}\mathrm{d}v\\&\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|\mathrm{d}v\\&\quad+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2\pi}\frac{1}{k+1}\to\infty(n\to\infty)\end{aligned}$$

□

§5.3.3 强收敛和弱收敛

定义 5.16 赋范线性空间 X 中序列$\{x_n\}$称为强收敛的(或称依范数收敛的),如果存在 $x\in X$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

x 被称为$\{x_n\}$的强极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

称$\{x_n\}\subseteq X$ 是弱收敛的,如果存在 $x\in X$,使得对任意的 $f\in X^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$,记为 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$.

引理 5.28 设$\{x_n\}$是赋范空间中弱收敛序列,则

(1) $\{x_n\}$的弱极限 x 是唯一的;

(2) $\{x_n\}$的每一子序列都弱收敛于 x;

(3)序列$\{\|x_n\|\}$是有界的。

证明 (1)设 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$,又 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}y$,则$\forall f\in X^*$, $f(x_n)\to f(x)$且 $f(x_n)\to f(y)$. 由数列极限的唯一性,$f(x)=f(y)$. 于是 $f(x)-f(y)=f(x-y)=0$. 从推论 5.19 知 $x-y=0$,即 $x=y$.

(2)由数列极限的性质而得。

(3)对 $x_n\in X$, $n=1,2,\cdots$, $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$. 因$\{f(x_n)\}$是实数序列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在,于是$\{f(x_n)\}$是有界的,即存在 $C_f>0$,使得 $|f(x_n)|\leqslant C_f$, $n=1,2,\cdots$ 对每个 $n\in\mathbf{N}$,定义 X^* 上线性泛函 g_n 如下:

$$g_n(f)=f(x_n),(\forall f\in X^*)$$

X^* 是 Banach 空间,$(X^*)^*$是赋范线性空间,由推论 5.21,其范数定义为

$$\|g_n\|=\sup_{f\in X^*,\|f\|\neq0}\frac{|f(x_n)|}{\|f\|}=\|x_n\| \qquad (5-27)$$

又$\forall f\in X^*$，$\{\|g_n(f)\|,n\in\mathbf{N}\}$是有界的，由一致有界原理知$\{\|g_n\|,n\in\mathbf{N}\}=\{\|x_n\|,n\in\mathbf{N}\}$是有界的。 □

定理 5.29 设$\{x_n\}$是赋范线性空间 X 中序列，则

(1) $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)\Rightarrow x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$；

(2) 如果 $\dim X<\infty$，则 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x\Rightarrow\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$.

证明 (1)$\forall f\in X^*$，$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_n-x\|\to(n\to\infty)$. 故 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$.

(2)设 $x_n\overset{w}{\Rightarrow}x$ 且 $\dim X=k$，$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$为 X 的一组基，记

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\alpha_2^{(n)}e_2+\cdots+\alpha_k^{(n)}e_k,n=1,2,\cdots,$$

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ke_k$$

考虑如下的 $f_1,f_2,\cdots,f_k$，

$$f_j(e_m)=\delta_{jm},j,m=1,2,\cdots,k$$

则 $f_j\in X^*$，$j=1,2,\cdots,k$，从而

$$|f_j(x_n)-f_j(x)|\to 0(n\to\infty),j=1,2,\cdots,k$$

而

$$f_j(x_n)=\alpha_j^{(n)},f_j(x)=\alpha_j,j=1,2,\cdots,k,n=1,2,\cdots$$

故 $\alpha_j^{(n)}\to\alpha_j(n\to\infty)$，$j=1,2,\cdots,k$，于是

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\left\|\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j^{(n)}-\alpha_j)e_j\right\|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j^{(n)}-\alpha_j|\,\|e_j\|\to 0(n\to 0)\end{aligned}$$ □

考察一些具体的赋范线性空间的弱收敛的条件是有趣的，见本章习题 23(l^p 空间中弱收敛的充分必要条件)。

由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子全体按算子范数 $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$ 组成的赋范空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中算子序列$\{T_n\}$有三种收敛性：

(1) 按 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中范数收敛，称之为一致算子收敛；

(2) 在 Y 中 $\{T_n x\}$ 的强收敛，称之为强算子收敛；

(3) 在 Y 中 $\{T_n x\}$ 的弱收敛，称之为弱算子收敛。

如果考虑 X 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 的收敛性，则只有两种情形：强收敛(对应(1))和弱*收敛(对应(2)和(3))，因为 $Y=\mathbf{R}$ 或 C(复数空间)是有限维空间，而由定理 5.29 知有限维赋范线性空间中的强收敛与弱收敛是等价的。

定义 5.17 设 X 和 Y 是赋范线性空间，称算子序列 $\{T_n\}\subseteq B(X\to Y)$ 为

(1) 一致算子收敛，如果存在 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$；

(2) 强算子收敛，如果 $\forall\ x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n x-Tx\|=0$；

(3) 弱算子收敛，如果 $\forall\ x\in X$，$T_n x\overset{w}{\Rightarrow}Tx$.

称赋范线性空间 X 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 强收敛，若存在 $f\in X^*$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$. 称 $\{f_n\}$ 弱*收敛，若存在 $f\in X^*$，使得 $\forall\ x\in X$，$f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$.

注 1 一致算子收敛蕴含强算子收敛，此因 $\|T_n x-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\cdot\|x\|$. 而强算子收敛蕴含弱算子收敛，此由 $|f(T_n x)-f(Tx)|\leqslant\|f\|\cdot\|T_n x-Tx\|$ 可知。

注 2 考虑 X^* 上的有界线性泛函全体，记为 X^{**}. 对于每个固定的 $x\in X$，定义 X^* 上的线性泛函 g 如下：

$$g(f)=f(x)(\forall\ f\in X^*)$$

则可知 g 是 X^* 上有界线性泛函。作映射 $\phi:X\to Y^{**}$，$\phi(x)=g$，则 ϕ 是线性的。将 X 视为 X^{**} 的子集，当 ϕ 是一一对应时，则有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f，等价于在 X^* 上，$f_n\overset{w}{\Rightarrow}f$.

引理 5.30 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$n=1,2,\cdots$. 若 $\|T_n-T\|\to0$，则 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$.

证明 只需证明T的有界性。因为，$\forall\ x\in X$，$\| T_n x-Tx\|\to 0$，故对每个$x\in X$，$\{\| T_n x\|\}$是有界的，又X是完备的，根据一致有界原理，$\{\| T_n\|\}$是有界的。设$\| T_n\|\leqslant C$，$n=1,2,\cdots$，从而，$\forall\ x\in X$，$\| T_n x\|\leqslant \| T_n\|\ \| x\|\leqslant C\| x\|$，由此推出$\| Tx\|\leqslant C\| x\|$，故$\| T\|\leqslant C$. □

定理 5.31 设X和Y都是Banach空间，$T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$，则$\{T_n\}$强算子收敛的充分必要条件是

(1) $\{\| T_n\|\}$有界；

(2) 对X的稠密子集M中每一x，$\{T_n x\}$是Cauchy序列。

证明 只证充分性。设条件(1)，(2)成立。由(1)有$\| T_n\|\leqslant C$，$n=1,2,\cdots$. $\forall\ x\in X$，要证$\{T_n x\}$在Y中强收敛。$\forall\ \varepsilon>0$，因$\overline{M}=X$，故存在$y\in M$，使得$\| x-y\|<\varepsilon$. 由(2)知$\{T_n y\}$是Cauchy序列，故存在$N\in\mathbf{N}$，使得

$$\| T_n y - T_m y\| < \varepsilon(m,n > N)$$

当$n,m>N$时，由上式有

$$\begin{aligned}&\| T_n x - T_m x\|\\ \leqslant{}& \| T_n x - T_n y\| + \| T_n y - T_m y\| + \| T_m y - T_m x\|\\ \leqslant{}& \| T_n\|\ \| x - y\| + \| T_n y - T_m y\| + \| T_m(y - x)\|\\ <{}& C\cdot\varepsilon + \varepsilon + C\varepsilon = (2C + 1)\varepsilon\end{aligned}$$

故$\{T_n x\}$是Y中Cauchy列，因Y是完备的，所以$\{T_n x\}$在Y中依范数收敛。 □

§5.3.4 闭图像定理

定义 5.18 设X和Y是赋范线性空间，$T:X\to Y$是线性算子，称T为闭线性算子，如果它的图

$$\mathrm{graph}T = \{(x,y)\mid x \in \mathrm{dom}(T), y = Tx\}$$

在赋范线性空间 $X\times Y$ 中是闭的，其中 $X\times Y$ 的线性运算定义为 $\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{R},x_i\in X,y_i\in Y,i=1,2)$，范数定义为 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$.

关于闭线性算子 T 有界的条件，有

定理 5.32 闭图像定理 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 是闭线性算子，如果 $\mathrm{dom}(T)$ 为 X 的闭子集，则算子 T 是有界的。

证明 记 $\mathscr{G}=\mathrm{graph}T=\{(x,y)\mid x\in\mathrm{dom}(T),y=Tx\}$. 由于 Y 是 Banach 空间，$\mathrm{dom}(T)$ 是闭集，所以 $\mathrm{dom}(T)$ 是 Banach 空间。定义算子 $P:\mathscr{G}\to X$，$P(x,Tx)=x$，$\forall\ x\in\mathrm{dom}(T)$. 这个算子称为投影算子。$\forall\ (x_i,Tx_i),\alpha_i\in\mathbf{R},i=1,2$，$P(\alpha_1(x_1,Tx_1)+\alpha_2(x_2,Tx_2))=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1P(x_1,Tx_1)+\alpha_2P(x_2,Tx_2)$，$P$ 是线性算子。

$\forall\ (x,Tx)\in\mathscr{G}$，$\|P(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|$，故 $\|P\|\leqslant1$，P 为有界的。当 $(x,Tx)\neq(y,Ty)$ 时，则或者 $x\neq y$ 或者 $x=y,Tx\neq Ty$，但 T 是算子，故当 $x=y$ 时，$Tx=Ty$. 因此，必有 $x\neq y$. 从而 $P(x,Tx)=x\neq y=P(y,Ty)$. 故 P 是一一对应的。于是逆算子 P^{-1} 存在，$P^{-1}:\mathrm{dom}(T)\to\mathscr{G}$. 因 $\mathrm{dom}(T)$ 是闭的，从而 $\mathrm{dom}(T)$ 是完备的，由逆算子定理，P^{-1} 是有界线性算子，故有 $\|(x,Tx)\|=\|P^{-1}x\|\leqslant\|P^{-1}\|\cdot\|x\|$. 因此，$\forall\ x\in\mathrm{dom}(T)$，$\|Tx\|\leqslant\|(x,Tx)\|\leqslant\|P^{-1}\|\cdot\|x\|$，$\|T\|\leqslant\|P^{-1}\|$，故 T 是有界线性算子。 □

注 1 闭图像定理在验证某个线性算子是连续时经常用到，尤其在用泛函分析方法研究偏微分方程时很重要。

注 2 闭图像定理中 $\mathrm{dom}(T)$ 为闭集不能少，否则，存在无界线性算子 T，使得 $\mathrm{graph}T$ 是闭的。

例 5-17（微分算子） 设 X 是 $[0,1]$ 上具有连续导函数的函数全体，$Y=C[0,1]$，在 X 和 Y 上的范数都定义为：$\|f\|=\sup\{|f(t)|,t\in[0,1]\}$，$(\forall\ f\in X,Tf\in Y)$. X 不是 Banach 空间，定义线性算子 $T:Tf=f'$，$(\forall\ f\in X.)$ 如果 $\{f_n\}\subseteq X$，在 $X\times Y$ 中，(f_n,f_n)

$\to(f,g)$，则$\{f'_n\}$在$[0,1]$上一致收敛于 g，因此，

$$f_n(t)-f_n(0)=\int_0^t f'_n(s)\mathrm{d}s\to\int_0^t g(s)\mathrm{d}s(n\to\infty)$$

而 $f_n(t)-f_n(0)\to f(t)-f(0)(n\to\infty)$，所以

$$f(t)=f(0)+\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$$

从而 $f'(t)=g(t)$，故 $\mathrm{graph}T$ 是闭的，于是 T 是闭线性算子。但 T 是无界算子，此因对 $f_n(t)=t^n, t\in[0,1]$，$\|f_n\|=1$，$(Tf_n)(t)=nt^{n-1}, t\in[0,1]$，$\|Tf_n\|=n\to\infty$，$(n\to\infty)$. 所以 $\|T\|=\infty$.

从例 5-17 知道，微分算子 T 是闭算子，但不是有界线性算子。

关于线性算子为闭算子的条件有

定理 5.33　设 X,Y 都是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，则 T 是闭线性算子的充分必要条件是：当 $x_n\to x$，$(\forall n, x_n\in\mathrm{dom}(T))$且 $Tx_n\to y$ 时，有 $x\in\mathrm{dom}(T)$，使得 $Tx=y$.

证明　$\mathrm{graph}T$ 是闭的当且仅当$(x,y)\in\overline{\mathrm{graph}T}\Rightarrow(x,y)\in\mathrm{graph}T$. 而$(x,y)\in\overline{\mathrm{graph}T}$当且仅当 $z_n=(x_n,Tx_n)\in\mathrm{graph}T$，且 $z_n\to z=(x,y)$，亦即 $x_n\to x, Tx_n\to y, x\in\mathrm{dom}(T)$. 这当且仅当 $x\in\mathrm{dom}(T)$且 $y=Tx$. □

§5.4　Hilbert 空间几何学

在赋范线性空间中，范数相当于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量的模长。然而，在赋范线性空间中缺少类似于欧氏空间中两向量的夹角概念，因而也缺少“正交”的概念，$\mathbf{R}^n$ 中这个概念是由两向量的内积 $\vec{a}\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$ 反映的，这里 $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)'\in\mathbf{R}^n$，$\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)'\in\mathbf{R}^n$，且 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交当且仅当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. $\mathbf{R}^n$

中的内积和正交性是否可推广到任意的线性空间上呢?事实上,这可以做到,由此引出了内积空间与完备内积空间的概念,而完备的内积空间则称之为 Hilbert 空间。

内积空间与 Hilbert 空间的理论比一般赋范线性空间与 Banach 空间更加丰富,其特殊的性质有:

(1) Hilbert 空间 H 可表为闭子空间和其正交补的直和形式。

(2) 正交集和正交序列及 H 中元素相应的表达式。正交投影定理。

(3) Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函可用内积表示(Riesz 表示)。

(4) 有界线性算子 T 的 Hilbert 共轭算子 T^* 的特征。

§5.4.1 内积空间的基本概念

在实的或复的 n 维欧几里得空间 E^n 中,$\forall\ x,y\in E^n$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$. 我们规定内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$$

其中 $\bar{y}_i$ 表 y_i 的共轭。这样定义的内积(x,y)具有以下特征:

(1) $(y,x)=\overline{(x,y)}$;

(2) 当 α,β 为复数时,$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$;

(3) $(x,x)\geqslant 0$ 且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

E^n 中向量的夹角、垂直、投影等几何概念均可由内积表述。对于一般线性空间,有下述定义:

定义 5.19 设 Λ 是实数域或复数域,X 是 Λ 上的线性空间,$\forall\ x,y\in X$,对应标量(X,Y),满足

(Ip1)共轭对称性:$(x,y)=\overline{(y,x)}$.

(Ip2)对第一变元的线性性：$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$，$\alpha,p\in\Lambda,z\in X$.

(Ip3)正定性：$(x,x)\geqslant 0$ 且 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

则称(x,y)为 x 与 y 的**内积**，$(X,(\cdot,\cdot))$称为**内积空间**。

注 1 由(Ip1)与(Ip2)得到(Ip4)：内积$(\cdot,\cdot)$关于第二变元的共轭线性性：$(z,\alpha x+Y)=\bar{\alpha}(z,x)+\bar{\beta}(z,y)$.

注 2 由 X 上的内积可引出 X 上的范数：$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，从而也可诱导出 X 上的度量 $d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$. 当然这需要证明。

定理 5.34 设 H 是内积空间，(x,y)是 H 上内积，则 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$定义了 H 上的一个范数。

证明 只需验证三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 为此，先证内积空间的 Schwarz 不等式：

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y) \qquad (5-28)$$

事实上，$\forall\ \lambda\in\Lambda$，

$$0\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+2R_e(x,y)\bar{\lambda}+(y,y)|\lambda|^2 \qquad (5-29)$$

当 $y\neq 0$ 时，则$(y,y)>0$. 取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$，则

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}\geqslant 0$$

由此即得(5—29)式。

在(5—29)式中，令 $\lambda=1$ 得

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2R_e(x,y)+\|y\|^2$$

由(5—29)，$|R_e(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)\cdot(y,y)}=\|x\|\cdot\|y\|$，故

$$\|x+y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2$$

从而 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. □

定义 5.20 完备的内积空间 H 称为 Hilbert 空间。

内积空间 X 的元素 x 称为正交于 $y\in X$，如果 $(x,y)=0$，记为 $x\perp y$. 对 X 的两个子集 A,B，如果 $\forall a\in A, x\perp a$，则称 x 垂直于 A，记为 $x\perp A$. 又当 $\forall a\in A, b\in B$ 时，有 $a\perp b$，则称 A 与 B 正交，记为 $A\perp B$.

类似于欧氏空间，内积空间 X 的范数也满足平行四边形等式：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{5-30}$$

事实上，$\forall x,y\in X$，

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\&=2(x,x)+2(y,y)\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

在内积空间 H 中，内积关于两个变元都是连续的，即当 $x_n\to x_0, y_n\to y_0$ 时，$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. 这是因为

$$\begin{aligned}&|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\\\leqslant&|(x_n,y_n)-(x_0,y_n)|+|(x_0,y_n)-(x_0,y_0)|\\=&|(x_n-x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)|\\\leqslant&\|x_n-x_0\|\cdot\|y_n\|+\|x_0\|\cdot\|y_n-y_0\|\end{aligned}$$

而 $y_n\to y_0(n\to\infty)$，故 $\{y_n\}$ 有界，于是

$$|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\to 0(n\to\infty)$$

例 5-18 (Hilbert **序列空间**) l^2 是一个 Hilbert 空间，其内积定义为

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\eta}_j \tag{5-31}$$

其范数定义为

$$\|x\|=(x,x)=(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

(5—31)式定义的级数 $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\eta}_j$ 的收敛性由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\bar{\eta}_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

而得。(5－31)式定义的(x,y)为l^p上的内积，这由内积的定义可直接验证。

例 5-19　当$p\neq 2$时，$(l^p,\|\cdot\|_p)$不是内积空间。

证明　如果$(l^p,\|\cdot\|_p)$上可以定义内积(x,y)，则由内积引出的范数$\|x\|_p=\sqrt{(x,x)}$必定满足平行四边形等式(5－30)。但在l^p中，有$x=(1,1,0,0,\cdots)$，$y=(1,-1,0,0,\cdots)$，使得$\|x\|_p=\|y\|_p=2^{\frac{1}{p}}$，$\|x+y\|_p+\|x-y\|_p=2$，当$p\neq 2$时，平行四边形等式不成立。故$(l^p,\|\cdot\|_p)$不是内积空间。 □

从例 5-19 知，Banach 空间不一定是内积空间。

定义 5.21　设X和$\tilde{X}$为同一数域Λ上的两个内积空间，称X与$\tilde{X}$同构，如果存在双映射的线性算子$T:X\to\tilde{X}$，它保持内积，即$\forall\ x,y\in X$，

$$(Tx,Ty)=(x,y)$$

定理 5.35　对任意内积空间X，存在一个 Hilbert 空间H，和X到H的某个稠密子空间W上的同构映射T。除同构空间外，H是唯一的。

证明　由赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$的完备化定理 5.5 知，存在一个 Banach 空间H和一个由X到H的稠密子集W上的等距同构映射T，由于在这个等距同构映射下的连续性，X中元素的和与元素和标量的积对应于W中相应元素的和及标量与元素的积。由内积关于两个变元的连续性，可以在H上定义内积为

$$(\hat{x},\hat{y})=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)$$

这里$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别是其所在等价类的代表，$\hat{x}$，$\hat{y}$分别表$\{x_n\}$与$\{y_n\}$所在的等价类。由于X是内积空间，所以，在X上，成立平行

四边形等式。而 T 是等距同构映射，因此，在 W 上，从而在 H 上（因 $\overline{W}=H$）的范数也满足平行四边形等式。由极化恒等式，可定义 H 上的内积（见本章习题 31*）使得 T 是 X 到 W 的内积同构。

由定理 5.5，除等距外，H 是唯一确定的。 □

关于 Hilbert 空间 H 的子空间 Y 有

定理 5.36 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的子空间，则

(1) Y 是完备的，当且仅当 Y 在 H 中是闭集。

(2) 如果 Y 是有限维的，则 Y 是完备的。

(3) 如果 H 是可分的，则 Y 也是可分的。

证略。

§5.4.2 投影定理

定义 5.22 设 H 是内积空间，$(\cdot,\cdot)$ 是其中内积，而 M 是 H 的子集，则称 H 中与 M 直交的元素全体为 M 的**直交补**，记为 $M^{\perp}$.

易知，$\forall\ M\subseteq H, M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$，$\theta$ 为 H 中的零元素。

M 的直交补 $M^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间。事实上，如果 $x_1,x_2\in M^{\perp}$，则 $\forall\ y\in M$，$(x_1,y)=0$，$(x_2,y)=0$，从而 $\forall\ \alpha_i\in\mathbf{R}, i=1,2$，$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=(\alpha_1x_1,y)+(\alpha_2x_2,y)=0$，故 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\in M^{\perp}$，$M^{\perp}$ 是线性子空间。又若 $x_n\in M^{\perp}$，$x_n\to x_0$，则由内积的连续性，$\forall\ y\in M$，成立

$$(x_0,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=0$$

$x_0\in M^{\perp}$，$M^{\perp}$ 是闭的。因此，$M^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间。由此可推知，当 $M\subseteq H$ 时，$\overline{(\mathrm{span}M)}^{\perp}=M^{\perp}$. 其中 $\mathrm{span}M$ 表由 M 生成的线性子空间。这是因为 $M\subseteq\overline{\mathrm{span}M}$，故 $\overline{\mathrm{span}M}^{\perp}\subseteq M^{\perp}$. 反之，$\forall\ x\in M^{\perp}$，即 $x\perp M$，则 $M\subseteq\{x\}^{\perp}$，而 $\{x\}^{\perp}$ 是闭线性子空间，故 $\overline{\mathrm{span}M}\subseteq$

$\{x\}^{\perp}$，因此，$x \perp \overline{\mathrm{span}M}$，从而 $x \in \overline{(\mathrm{span}M)}^{\perp}$，于是 $M^{\perp} \subseteq \overline{(\mathrm{span}M)}^{\perp}$，所以，$\overline{(\mathrm{span}M)}^{\perp}=M^{\perp}$.

定义 5.23　设 H 是内积空间，M_1,M_2 是 H 的两个线性子空间，且 $M_1 \perp M_2$，则称 $M_1 \oplus M_2=\{x_1+x_2 \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$ 为 M_1 与 M_2 的**直交和**。

类似地定义有限个线性子空间的**直交和**。

定义 5.24　设 M 是内积空间 H 的线性子空间，$x \in H$，如果有 $x_0 \in M$，$x_1 \perp M$，使得 $x=x_0+x_1$，则称 x_0 是 x 在 M 上的（直交）**投影**，记 $x_0=P_M x$.

正如在解析几何中，空间中任一向量对某一子集的投影不一定存在一样，内积空间中的任意向量 x 及任意线性子空间 M，x 在 M 上的投影也不一定存在。但若投影存在，则有

定理 5.37　设 M 是内积空间 H 的线性子空间，$x \in H$，如果 x 在 M 上投影 x_0 存在，则

(1)　x_0 是唯一的。

(2)　$\| x-x_0 \| = \inf\limits_{y \in M} \| x-y \|$，且 x_0 是使此式成立的唯一元素。

证明　(1)设 x_0,x_0' 都是 x 在 M 上的投影，则有 $x_0,x_0' \in M$，$x-x_0 \perp M$，$x-x_0' \perp M \Rightarrow \forall\ y \in M$，$(x_0-x_0',y)=(x-x_0'-(x-x_0),y)=(x-x_0',y)-(x-x_0,y)=0$，故 $x_0-x_0' \perp M$，但 $x_0-x_0' \in M$，故 $(x_0-x_0',x_0-x_0')=0 \Rightarrow \| x_0-x_0' \| =0 \Rightarrow x_0=x_0'$. 唯一性得证。

(2)因 x_0 是 x 在 M 上的投影，故 $x_0 \in M$，$x-x_0 \perp M$，$\forall\ y \in M$，$x-y=(x-x_0)+x_0-y$，而 $x_0-y \in M$，因此 $x-x_0 \perp x_0-y$，于是，由内积与范数的关系，有

$$\| x-y \|^2 = \| x-x_0 \|^2 + \| x_0-y \|^2 \geqslant \| x-x_0 \|^2$$

故 $\| x-x_0 \| \leqslant \inf\limits_{y \in M} \| x-y \|$，又 $x_0 \in M$，所以 $\| x-x_0 \| = \inf\limits_{y \in M} \| x-y \|$. □

定理 5.37 说明,用 M 中元 y 来近似 x 时,当且仅当 y 等于 x 在 M 上的投影 x_0 时,逼近的程度最好。因此,在逼近论中常用投影的这个性质来研究最佳逼近。

内积空间 H 的子空间 M 具备什么条件时,$\forall\, x\in H$,x 在 M 上的投影 x_0 才存在呢?

引理 5.38(变分引理) 设 $M\neq\varnothing$ 是内积空间 H 中完备的凸集,则对每个给定的 $x\in H$,存在唯一的 $x_0\in M$,使得

$$\|x-x_0\| = \inf_{y\in M}\|x-y\|$$

证明 记 $d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$,则存在 M 中序列 $\{y_n\}$,使得 $d_n=\|x-y_n\|\to d(n\to\infty)$. $\{y_n\}$是 M 中 Cauchy 列。

事实上,记 $v_n=y_n-x$,则 $\|v_n\|=d_n$,且

$$\|v_n+v_m\| = \|y_n+y_m-2x\| = 2\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\right\| \geqslant 2d$$

上面右端不等式成立是因为 M 是凸集,故$\frac{y_n+y_m}{2}\in M$,又由平行四边形等式得

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &= \|v_n-v_m\|^2\\ &= -\|v_n+v_m\|^2+2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2)\\ &\leqslant -(2d)^2+2(d_n^2+d_m^2)\end{aligned}$$

由 $d_n\to d(n\to\infty)$,$d_m\to d(m\to\infty)$知$\{y_n\}$为 M 中的 Cauchy 列。而 M 是完备的,故存在 $x_0\in M$,使得 $y_n\to x_0(n\to\infty)$. 因 $x_0\in M$,故$\|x-x_0\|\geqslant d$. 又

$$\begin{aligned}\|x-x_0\| &\leqslant \|x-y_n\|+\|y_n-x_0\|\\ &= d_n+\|y_n-x_0\|\to d(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以$\|x-x_0\|=d$.

又如果存在 $x_0\in M$,$x_0'\in M$,使得$\|x-x_0\|=d$ 且$\|x-x_0'\|=d$,则由平行四边形等式

$$0\leqslant \|x_0-x_0'\|^2 = \|x_0-x-(x_0'-x)\|^2$$

$$= 2\|x_0 - x\|^2 + 2\|x_0' - x\|^2$$
$$- \|(x_0 - x) + (x_0' - x)\|^2$$
$$= 2d^2 + 2d^2 - 4\left\|\frac{x_0 + x_0'}{2} - x\right\|^2$$
$$\leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0$$

知 $\|x_0 - x_0'\| = 0$，所以 $x_0 = x_0'$. □

定理 5.39(**投影定理**) 设 M 是内积空间 H 的完备线性子空间，则 $\forall\ x \in H$，x 在 M 上的投影唯一地存在，即存在 $x_0 \in M$，$x_1 \perp M$，使得 $x = x_0 + x_1$，且这种分解是唯一的。

证明 由引理 5.38 知，存在 $x_0 \in M$，使得 $\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| \triangleq d$. 往证 $x - x_0 \perp M$.

$\forall\ y \in M, y \neq \theta, \forall\ \lambda \in \Lambda$，因为 $x_0 + \lambda y \in M$，所以

$$d^2 \leqslant \|x - (x_0 + \lambda y)\|^2$$
$$= \|x - x_0\|^2 - 2R_e(\bar{\lambda}(x - x_0), y) + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

令 $\lambda = \dfrac{(x - x_0, y)}{\|y\|^2}$，则

$$d^2 \leqslant \|x - x_0\|^2 - 2\frac{|(x - x_0, y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x - x_0, y)|^2}{\|y\|^2}$$
$$= \|x - x_0\|^2 - \frac{|(x - x_0, y)|^2}{\|y\|^2}$$

因 $\|x - x_0\| = d$，故 $(x - x_0, y) = 0$，从而 $(x - x_0) \perp y$，所以 $x - x_0 \perp M$. 唯一性已如前证。 □

定理 5.40 设 M 是 Hilbert 空间 H 的任一闭子空间，则 $H = M \oplus M^{\perp}$.

证明 因 H 是完备的，M 为闭集，从而 M 是完备的。由定理 5.39 知 $H = M \oplus M^{\perp}$. □

投影定理是 Hilbert 空间理论的一个极其重要的基本定理。如下列问题可用投影定理解决：

例 5-20 设有 $n+1$ 个变量 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$，在 m 次观察中，

其每次的观察值是$(x_0^{(j)},x_1^{(j)},\cdots,x_n^{(j)})$，$j=1,2,\cdots,m$. 现在要用$x_1^{(j)},x_2^{(j)},\cdots,x_n^{(j)}$的线性组合近似$x_0^{(j)}$，即求$\alpha_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$x_0^{(j)}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{(j)},j=1,2,\cdots,m$$

尽可能地小，即求$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(x_0^{(j)}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{(j)}\Big)^2=\inf_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}\sum_{j=1}^{m}\Big(x_0^{(j)}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^{(j)}\Big)^2$$

又如在实际中常遇到的函数逼近问题：对于一个函数f，要用给定的函数$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$的线性组合来逼近$f$，使得误差的平方平均值最小。具体地说，对$f\in L^2[a,b]$，$\phi_i=x^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$. 要求数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$使得

$$\Big\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x^{i-1}\Big\|=\Big\{\int_a^b\Big|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x^{i-1}\Big|^2\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

最小。达最小的多项式$p(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x^{i-1}$称为按平方平均的最佳逼近多项式。

上述问题均可抽象如下：

设H是内积空间，$x,x_i,i=1,2,\cdots,m$是H中$n+1$个向量，要求n个数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\|=\inf_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}\Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big\|$$

解　不妨设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性无关的，否则，考虑其极大线性无关组好了。以M表由$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合全体所成的n维线性空间，而有限维线性空间是完备的，故M是完备的。由引理5.38，存在唯一的$x_0\in M$，$x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，使得$\|x-x_0\|$达到最小，从引理5.38的证明可知

$$(x-x_0,y)=0(\forall\ y\in M)$$

这等价于

$$(x - x_0, x_i) = 0, i = 1,2,\cdots,n$$

即等价于

$$(x,x_i) = (x_0,x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j(x_j x_i), i = 1,2,\cdots,n.$$

由于上述方程组的解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是唯一的，故系数行列式不等于零，从而，

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \cdots & (x,x_1) & \cdots & (x_n,x_1) \\ (x_1,x_2) & \cdots & (x,x_2) & \cdots & (x_n,x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_1,x_n) & \cdots & (x,x_n) & \cdots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \cdots & (x_i,x_1) & \cdots & (x_n,x_1) \\ (x_1,x_2) & \cdots & (x_i,x_2) & \cdots & (x_n,x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_1,x_n) & \cdots & (x_i,x_n) & \cdots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}}, i = 1,\cdots,n$$

§ 5.4.3 Hilbert 空间的正交系

在 Euclidean 空间 $\mathbf{R}^3$ 中，取 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$，在通常的内积 $(x,y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ 下，e_1,e_2,e_3 是相互正交的，且 $\| e_i \| = \sqrt{(e_i,e_i)} = 1, i = 1,2,3.$ $\forall\ x \in \mathbf{R}^3$，存在唯一的数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，使得 $x = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$. 而且，$\alpha_i$ 可如下求得：

$$(e_i,x) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(e_i,e_j) = \alpha_i, i = 1,2,3$$

称 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组**规范正交基**。在 Hilbert 空间中，因定义了内积，故亦可推广规范正交基的概念。

定义 5.25 设 F 是内积空间 H 的一族非零向量，如果 F 中任何两个不同非零向量都正交，则称 F 为一个正交系。若 F 中每

个向量的范数都为1，则称 F 为规范正交系。

对于正交系 F，$\forall\ x,y\in F, x\neq y$ 由于 $(x,y)=0$，所以

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y)\\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2\end{aligned}$$

且 $\forall\ x_i\in F, i=1,2,\cdots,n$，因为当 $j\neq k$ 时，$(x_j,x_k)=0$，所以

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \qquad (5-32)$$

由内积的性质，不难验证：正交系是线性无关的。事实上，$\forall\ e_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n$. 设

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i=0$$

以 $e_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 对 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ 作内积，有

$$0=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,e_k)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i,e_k)=\alpha_k, k=1,2,\cdots,n$$

所以，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性无关的，从而 F 是线性无关的。

例 5-21 设 $C[0,2\pi]$ 是 $[0,2\pi]$ 上实值连续函数全体，其内积定义为

$$(x,y)=\int_0^{2\pi}x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (x\in C[0,2\pi], y\in C[0,2\pi])$$

则

$$e_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_k(t)=\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \tilde{e}_k(t)=\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, k=1,2,\cdots$$

是 $(C[0,2\pi],(\cdot,\cdot))$ 的一个规范正交系，此由下述式子即知：

$$(e_j,e_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos jx\cos kx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, j\neq k,\\ 1, j=k\neq 0\end{cases}$$

$$(e_0,e_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x=0, k\neq 0,$$

$$(e_0,e_0)=1$$

对$(\tilde{e}_j,\tilde{e}_k)$，$j,k=1,2,\cdots$及$(e_j,\tilde{e}_k)$，$j=0,1,2,\cdots$，$k=1,2,\cdots$也有类似结果。

定义 5.26 设F是内积空间H中的规范正交系，$x\in H$，数集

$$\{(x,e)\mid e\in F\}$$

称为向量x关于规范正交系F的 Fourier 系数集，而(x,e)称为x关于$e(\in F)$的 Fourier 系数。

例 5-22 对于$L^2([0,1])$中序列$\{e^{i2\pi nt}\mid n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，在内积$(x,y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\,(x,y\in L^2([0,1]))$的定义下是规范正交系，对于任意$f\in L^2[0,1]$，其 Fourier 系数为

$$c_n=\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}\mathrm{d}t\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

对于内积空间H中的规范正交系，有下述重要性质：

(1)设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是内积空间H中的规范正交系，$M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，$\forall\, x\in H$，$P_Mx>x_0=\sum_{i-1}^{n}(x,e_i)e_i$，且$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$，$\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2$.

证明 易知$x_0=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\in M$，且$(x_0,e_i)=(x,e_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 因此$(x-x_0,e_i)=(x,e_i)-(x_0,e_i)=0$，$i=1,\cdots,n$，$x-x_0\perp M$. 所以$P_Mx=x_0=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$. 而由于$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,x-x_0\}$是正交系，根据(5－32)式(勾股定理)知

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|(x,e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

$$\|x\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0\|^2=\|x-x_0\|^2+\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

因此

$$\| x - x_0 \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \qquad \square$$

(2)由(1)可推知：当$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是内积空间 H 中规范正交系时，则$\forall\ x\in H$，

$$\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \leqslant \| x \|^2 \qquad (5-33)$$

对任意 n 个数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x,e_i) e_i \right\| \qquad (5-34)$$

且等号成立的充要条件是 $\alpha_i=(x,e_i),i=1,2,\cdots,n$.

事实上，由(1)的 $\| x-x_0 \|^2=\| x \|^2-\| x_0 \|^2$ 知

$$\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 = \| x_0 \|^2 = \| x \|^2 - \| x - x_0 \|^2 \leqslant \| x \|^2$$

至于不等式(5－34)，注意到

$$\| x - x_0 \|^2 = \inf_{y\in M} \| x - y \|$$

即可，其中 $M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.

下一个性质是要将不等式(5－33)推广到无穷正交系的情形。

定理 5.41(Bessel **不等式**) 设 $F=\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是内积空间 H 的规范正交系，其中 Λ 为指标集，则$\forall\ x\in H$，x 的 Fourier 系数$\{(x,e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$中最多只有可列个不为零，而且适合 Bessel 不等式

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |(x,e_\lambda)|^2 \leqslant \| x \|^2 \qquad (5-35)$$

证明 当 Λ 为有限集时，(5 － 35) 式即是(5 － 33) 式。当 Λ 为可列集时，在(5 － 33) 式中令 $n\to\infty$ 即得(5 － 35) 式。故只需对 Λ 是不可列集时证明(5 － 35) 式。对每个自然数 n，记 $F_n=\{e_\lambda | |(x,e_i)| \geqslant \frac{1}{n}\}$，则 F_n 只能是有限集，因 $\forall\ m\in N$，$\sum_{i=1}^{m} |(x,e_i)|^2 \leqslant$

$\| x \|^2 < \infty$ 之故。从而当 $e_\lambda \in F - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_n$ 时，$(x, e_\lambda) = 0$，而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n$ 为至多可列集，所以

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2 = \sum_{e_\lambda \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} |(x, e_\lambda)|^2 \leqslant \| x \|^2 \qquad \square$$

推论 5.42　设 $\{e_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是内积空间 H 中的规范正交系（此时称为规范正交序列），则 $\forall\, x \in H$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} (x, e_n) = 0$.

这由定理 5.41 中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ 收敛得知。

在 $\mathbf{R}^3$ 中，取 $F = \{e_1, e_2, e_3\}$，易知 $\overline{\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}} = R^3$，对任意内积空间 X 中的规范正交系 $F = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$，如果 $\overline{\mathrm{span} F} = X$，则 $\forall\, x \in X$，或者存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in R$，使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$；或者存在 $x_n \in \mathrm{span} F$，使得 $\lim\limits_{n \to \infty} \| x - x_n \| \to 0$.

定义 5.27（**完全规范正交系**）　称内积空间 X 中的规范正交系 $F = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是完全的，如果 $\overline{\mathrm{span} F} = X$. 此时，$F$ 也称为 X 的规范正交基。

给定一个 Hilbert 空间 $H \neq \{\theta\}$，则其一切完全规范正交系具有同样的基数。这对有限维内积空间是明显的，但对无限维内积空间需要用到集合论的进一步工具，在此从略。

当 F 是内积空间 X 的完全规范正交系时，我们来考虑一下 $F^\perp$，即 F 的正交补。

定理 5.43　规范正交系 $F = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 的完全规范正交系当且仅当 $F^\perp = \{\theta\}$.

证明　先证必要性。因 F 是完全的，故 $\overline{\mathrm{span} F} = H$. $\forall\, x \in F^\perp$，则有 $x \in H$. 由于 $\overline{\mathrm{span} F} = H$，故存在 $\{x_n\} \subseteq \mathrm{span} F$，使得 $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$. 又因 $F^\perp \perp \mathrm{span} F$，故 $(x, x_n) = 0, n = 1, 2, \cdots$，由内积的连续性，$(x, x) = \lim\limits_{n \to \infty} (x, x_n) = 0 \Rightarrow \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$. 所以 $F^\perp = \{\theta\}$.

充分性。设 $F^{\perp}=\{\theta\}$. 要证 F 是完全的，即证 $\overline{\mathrm{span}F}=H$. 记 $E=\overline{\mathrm{span}F}$，因 $F\subseteq E$，故 $F^{\perp}\supset E^{\perp}$，从而 $E^{\perp}=\{\theta\}$. 由定理 5.40 知 $H=E\oplus E^{\perp}=E$. 所以，F 是完全的。 □

根据定理 5.41 的 Bessel 不等式，对于 Hilbert 空间 H 中的任一规范正交系 F，$\forall\ x\in H$，有

$$\sum_{e_\lambda\in F}|(x,e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2$$

上式左端是可列和。如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\|x\|^2 \tag{5-36}$$

则称上式为 Parseval 等式。由 Parseval 等式，我们得到判别完全性的另一准则：

定理 5.44(完全性) Hilbert 空间 H 中规范正交系 F 在 H 中是完全的，当且仅当$\forall\ x\in H$，Parseval 等式(5-36)成立。

证明 先证当$\forall\ x\in H$，Parseval 等式成立时，F 是完全的。由定理 5.43，若 F 不完全，则存在非零元素 $x\in H$，使得 $x\perp F$，从而，$\forall\ e_k\in F$，有$(x,e_k)=0$，$k=1,2,\cdots$，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=0\neq\|x\|^2$$

所以，F 是完全的。

其次证明，当 F 是完全规范正交系时，$\forall\ x\in H$，Parseval 等式成立。因根据定理 5.41，使得$(x,e_\lambda)\neq 0$ 的 $e_\lambda\in F$ 至多为可列个，不妨记 $M=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$，令 $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)$，往证 $x-y\perp F$.

事实上，$(x-y,e_j)=(x,e_j)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)(e_k,e_j)=(x,e_j)-(x,e_j)=0$，$j=1,2,\cdots$. 当 $e_\lambda\in F\backslash M$ 时，$(x,e_\lambda)=0$，故$(x-y,e_\lambda)=(x,e_\lambda)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)(e_k,e_\lambda)=(x,e_\lambda)=0$. 因此 $x-y\perp F$.

根据定理 5.43，$F^{\perp}=\{\theta\}$，故 $x=y$，因此，

$$\|x\|^2=\|y\|^2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k,\sum_{j=1}^{\infty}(x,e_j)e_j\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(x,e_j)}(e_k,e_j)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$$

所以，Parseval 等式(5－36)成立。 □

对于给定的 Hilbert 空间 H，如何找出它的完全规范正交系，这是一个饶有兴趣的实际问题。为此，我们必须对给定的一个线性无关系，找出一种将其规范化的方法。下面介绍 Gram-Schmidt 方法。

设 $G=\{g_1,g_2,\cdots\}$ 为内积空间 X 的线性无关序列，构造规范正交序列 $E=\{e_1,e_2\cdots\}$ 如下，要求 $\forall\ n\in\mathrm{N}$，$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$.

第一步：令 $e_1=\dfrac{1}{\|g_1\|}g_1$.

第二步：构造 e_2，要求 $g_2=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$，因 e_1 与 e_2 为规范正交的，故 $\alpha_1=(g_2,e_1)$，令

$$v_2=g_2-(g_2,e_1)e_1,e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}\cdot$$
$$\alpha_2=(g_2,e_2)=\frac{\|g_2\|^2-|(g_2,e_1)|^2}{\|v_2\|}$$

注意到 g_2 与 g_1 线性无关，故 $g_2-(g_2,e_1)e_1\neq 0$，且 $(v_2,e_1)=(g_2,e_1)-(g_2,e_1)=0$，$e_2\perp e_1$.

第三步：类似于第二步，令 $v_3=g_3-(g_3,e_1)e_1-(g_3,e_2)e_2$，因为 g_1,g_2,g_3 线性无关，故 $v_3\neq 0$，且 $(v_3,e_i)=0$，$i=1,2,3$. 令

$$e_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}$$

第 n 步：设 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 已取好如前，令

$$v_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1}(g_n,e_i)e_i$$

则 $v_n \neq 0$ 且 $v_n \perp e_i, i = 1,2,\cdots,n-1$，由此得 $e_n = \dfrac{v_n}{\| v_n \|}$.

依此下去，得 $E=\{e_1,e_2,\cdots\}$，易知 E 是规范正交系，且由 $v_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1}(g_n,e_i)e_i$ 及 $e_n = \dfrac{v_n}{\| v_n \|}$ 有

$$g_n = \sum_{i=1}^{n-1}(g_n,e_i) + \| v_n \| e_n$$

从而 $\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}\subseteq \text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，亦不难验证：$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\subseteq \text{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$. 因此，$\forall\ n\in N$，

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \text{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$$

对于一个具体的 Hilbert 空间 H，如何求其完全规范正交系？下面考虑$[-1,1]$上的一切实值连续函数的空间 X 按内积

$$(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\mathrm{d}t \qquad (5-37)$$

成为内积空间，其完备化后的内积空间记为 $L^2([-1,1])$，我们以求出其一个完备规范正交序列说明其一般方法。

例 5-23　以 X 记$[-1,1]$上的一切实值连续函数全体。内积如(5－37)式所定义，完备化的内积空间记为 $L^2([-1,1])$. 考虑幂函数序列

$$x_0(t) = 1, x_1(t) = t,\cdots,x_j(t) = t^j,\cdots,t \in [-1,1]$$

这个序列是线性无关的。事实上，$\forall\ n \in N$，若 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t^{j_k} = 0(\forall\ t \in [-1,1]$(不妨设 $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$)，则有 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t^{j_k-j_1} = 0$. 令 $t=0$ 得 $\alpha_1 = 0$. 由 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t^{j_k-j_2} = 0$，令 $t = 0$ 得 $\alpha_2 = 0$. 依此下去，得 $\alpha_n =$

0. 所以，$x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n}$ 是线性无关的。从而 $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$ 是线性无关的。由 Gram-Schmidt 方法得到规范正交序列 $e_0,e_1,e_2,\cdots,e_n=p_n(t),n=1,2,\cdots,p_n(t)$ 为 n 次多项式。现在证明 $\{e_n\}$ 在 $L^2([-1,1])$ 是完全的。

事实上，由内积空间的完备化定理（定理 5.35）知，存在等距同构 $A:X\to W\subseteq L^2([-1,1])$，使得 $A(X)$ 在 $L^2([-1,1])$ 中稠密。因此，对每个 $x\in L^2([1,-1])$，$\forall\ \varepsilon\in>0$，存在 $y\in X=C([-1,1])$，使得

$$\|x-y\|<\frac{1}{2}$$

又对这个 y，存在多项式 $z(t)$（Weierstrass 逼近定理）使得对一切 $t\in[-1,1]$

$$|y(t)-z(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

由此有

$$\|y-z\|^2=\int_{-1}^{1}|y(t)-z(t)|^2\mathrm{d}t<2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

由三角不等式得

$$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|<\varepsilon$$

又因对充分大的 m，$z\in\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，故 $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}=L^2([-1,1])$，所以，$\{e_n\}$ 在 $L^2([-1,1])$ 中是完全的。

然而，要直接由 Gram-Schmidt 方法从 $\{x_n\}$ 得到完全规范正交序列 $\{e_n\}$ 还是相当困难的。可采取特殊方法给出如下：

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n],n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t),n=0,1,2,\cdots$$

此处 P_n 称为 Legendre 多项式。

为此，只需证明(i) $\| P_n \| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$；(ii) $P_n(t)$ 是 $L^2([-1,1])$ 中正交序列。因为若(i)，(ii)成立，则 $y_n(t)=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_n(t)$ 是 n 次多项式，且 $\{y_n\}$ 是 $L^2([-1,1])$ 上的规范正交序列，因此

$$
\begin{aligned}
Y_n &\triangleq \operatorname{span}\{e_0,e_1,\cdots,e_n\} \\
&= \operatorname{span}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\} \\
&= \operatorname{span}\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}
\end{aligned}
$$

前一等号由 Gram-Schmidt 方法得到，后一等号是因为 $\dim Y_n = n+1$，而 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 线性无关。所以

$$
y_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k
$$

由于(ii)成立，$y_n \perp y_{n-1}$，故对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$

$$
0 = (y_n, e_k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (e_i, e_k) = \alpha_k
$$

所以 $y_n = \alpha_n e_n$. 因 $\| y_n \| = \| e_n \| = 1$. 故 $|\alpha_n| = 1$. 但当 t 充分大时，$y_n(t) > 0$，$e_n(t) > 0$，所以 $\alpha_n = 1$，从而 $y_n = e_n$. 这样便求得了 $L^2[-1,1]$的完全规范正交序列。往证(i)与(ii)成立。

(i)记 $u_n = (t^2-1)^n$，则 $(u_n)^{(k)}|_{t=\pm 1} = 0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，$u_n^{(2n)} = (2n)!$，由分部积分得

$$
(2^n n!)^2 \| P_n \|^2 = \int_{-1}^{1} (u_n)^{(n)} (u_n)^{(n)} \mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}
$$

由此得 $\| P_n \| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

(ii)要证明对 $0 \leqslant m < n$，$(P_m, P_n) = 0$，因 P_m 是多项式，故只需证 $(t^m, P_n) = 0 (m<n)$ 即可。由分部积分得

$$
2^n n! (t^m, P_n) = \int_{-1}^{1} t^m (u_n)^{(n)} \mathrm{d}t = 0
$$

因此$\{P_n\}$是$L^2([-1,1])$中正交序列。

注 $P_n(t)$是重要的 Legendre 微分方程

$$(1-t^2)P''_n - 2tP'_n + n(n+1)P_n = 0$$

的解，在数学物理方程中是一类非常重要的函数。

§5.4.4 Hilbert 空间上线性泛函的表示

在 Banach 空间 $L^2[a,b]$，l^p 等上的有界线性泛函，已在§5.3中得到了其表示式。求出对一般的 Banach 空间上的有界线性泛函的表示并非易事。然而，对于 Hilbert 空间上的有界线性泛函，却有比较简单的表示。

定理 5.45(Riesz **表示定理**)　在 Hilbert 空间 H 上的每个有界线性泛函 f，存在唯一的 $z\in H$，使得

$$f(x) = (x,z)(\forall\ x \in H) \qquad (5-38)$$

且$\|f\| = \|z\|$.

证明　如果$f=0$，则取$z=0$. 当$f\neq 0$时，满足(5−38)式的$z\in N(f)^{\perp}$，这里$N(f)=\{x\,|\,f(x)=0\}$. 这是因为$\forall\ x\in N(f)$，有$(x,z)=f(x)=0$. 又因$f\neq 0$及f的连续性，从而$N(f)$为闭集，于是$N(f)^{\perp}\neq\{\theta\}$，存在$y\neq\theta$，$y\in N(f)^{\perp}$. $\forall\ x\in H$，令$v=f(x)y-f(y)x$，则由

$$f(v) = f(x)f(y) - f(y)f(x) = 0$$

知$v\in N(f)$，从而$v\perp y$. 于是

$$0 = (v,y) = (f(x)y - f(y)x, y) = f(x)(y,y) - f(y)(x,y)$$

因$\|y\|\neq 0$，故

$$f(x) = \frac{f(y)}{\|y\|^2}(x,y) = \left(x, \frac{f(y)}{\|y\|^2}y\right)$$

令$z=\dfrac{f(y)}{\|y\|^2}y$，则$\forall\ x\in H$，有

$$f(x) = (x,z)$$

满足上式的 z 是唯一确定的。事实上,设 z_1,z_2 使得(5—38)成立,从而

$$f(x)=(x,z_1)=(x,z_2)(\forall\ x\in H)$$

$$(x,z_1-z_2)=0(\forall\ x\in H)$$

取 $x=z_1-z_2$,有$(z_1-z_2,z_1-z_2)=\|z_1-z_2\|^2=0\Rightarrow z_1-z_2=0$,故 $z_1=z_2$.

又当 $f=0$ 时,取 $z=0$,故 $\|f\|=\|z\|=0$. 当 $f\neq 0$ 时,$z\neq 0$,于是 $|f(x)|=|(x,z)|\leqslant\|x\|\ \|z\|$,$\|f\|=\sup|f(x)|\leqslant\|z\|$. 另一方面,由(5—38)式 $\|z\|^2=|(z,z)|^2=|f(z)|\leqslant\|f\|\ \|z\|$,因 $\|z\|>0$,故 $\|f\|\geqslant\|z\|$. 所以 $\|z\|=\|f\|$.

□

以 H^* 记 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函全体,则称 H^* 为 H 的共轭空间。由 Riesz 表示定理 5.45,作 H 到 H^* 的映射 A 如下:

$$A:y\rightarrow f_y$$

即 $A(y)=f_y$,f_y 为由(5—38)式确定的 H 上的有界线性泛函,则 A 是 $H\rightarrow H^*$ 的一一映射。

易知,A 是共轭线性的,即$\forall\ \alpha,\beta,y,z\in H$,有 $A(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}A(y)+\bar{\beta}A(z)$. 这是因为$\forall\ x\in H$,

$$f_{\alpha y+\beta z}(x)=(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z)=\bar{\alpha}f_y+\bar{\beta}f_z$$

并可知 $\|Ay\|=\|y\|$. 我们称 A 为 H 到 H^* 的复共轭线性同构,在这种同构意义下,常将 H 中 y 与 H^* 中由(5—38)式确定的 f_y 等同起来。

为了研究 Hilbert 空间上的投影算子,需要讨论 Hilbert 空间上伴随算子的存在性及其性质。

定理 5.46　设 H_1,H_2 都是 Hilbert 空间,$T:H_1\rightarrow H_2$ 是有界线性算子,则存在唯一的算子 $T^*:H_2\rightarrow H_1$,使得对一切 $x\in H_1$,$y\in H_2$,有

$$(Tx,y) = (x,T^* y) \qquad (5-39)$$

且 T^* 有界线性算子，$\|T^*\| = \|T\|$.

证明 $\forall\, y \in H_2$，对每个 $x \in H_1$，因 $|(Tx,y)| \leqslant \|Tx\| \cdot \|y\| \leqslant \|T\|\ \|x\|\ \|y\|$，故 $f_y(x) = (Tx,y)$ 是 H_1 上有界线性泛函。由于 H_1 是完备的，由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H_1$，使得

$$f_y(x) = (Tx,y) = (x,z) \quad (\forall\, x \in H_1)$$

作算子 $T^*: H_2 \to H_1$，$T^* y = z$，则 $\forall\, x \in H_1, y \in H_2$，有

$$(Tx,y) = (x,z)$$

由 Riesz 表示定理知 T^* 由 T 唯一确定。往证 T^* 是有界线性算子。

对任意 $y_1, y_2 \in H_2$ 及数 α, β，

$$\begin{aligned}(Tx,\alpha y_1 + \beta y_2) &= \bar{\alpha}(Tx,y_1) + \bar{\beta}(Tx,y_2)\\ &= \bar{\alpha}(x,T^* y_1) + \bar{\beta}(x,T^* y_2)\end{aligned}$$

所以，$T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} T^* y_1 + \bar{\beta} T^* y_2$，故 T^* 是共轭线性的。

由 Schwarz 不等式与 Riesz 表示定理得 $\forall\, y \in H_2$，

$$\|T^* y\| = \|f_y\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,y)| \leqslant \|T\|\ \|y\|$$

所以，$\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

另一方面，

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|y\|=1} \|T^* y\|\\ &= \sup_{\|y\|=1} |(Tx,y)|\\ &= \sup_{x\neq 0, y\neq 0} \frac{|(Tx,y)|}{\|x\|\ \|y\|}\\ &\geqslant \sup_{x\neq 0, Tx\neq 0} \frac{|(Tx,Tx)|}{\|x\|\ \|Tx\|}\\ &= \sup_{x\neq 0, Tx\neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|\ \|x\|}\\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|\end{aligned}$$

综上得

$$\|T^*\| = \|T\| \qquad \square$$

定义 5.28 设 H_1, H_2 是两个 Hilbert 空间，$T: H_1 \to H_2$ 是有界线性算子，则称定理 5.46 中的算子 T^* 为 T 的**伴随算子**(或称**共轭算子**)。

引理 5.47 设 X, Y 是内积空间，且 $Q: X \to Y$ 是有界线性算子，则

(1) $Q=0$ 当且仅当$\forall\ x \in X, y \in Y, (Qx, y)=0$;

(2) 若 $Q: X \to X$, X 为复内积空间，且$\forall\ x \in X, (Qx, x)=0$，则 $Q=0$.

证明 (1)(作为习题)；(2)对每个 $v=\alpha x+\beta y \in X$，有$(Qv, v)=0$，即 $0=(Q(\alpha x+\beta y), \alpha x+\beta y)=|\alpha|^2(Qx, x)+|\beta|^2(Qy, y)+\alpha\bar{\beta}(Qx, y)+\bar{\alpha}\beta(Qy, x)=\alpha\bar{\beta}(Qx, y)+\bar{\alpha}\beta(Qy, x)$. 令 $\alpha=1, \beta=1$ 得

$$(Qx, y) + (Qy, x) = 0$$

取 $\alpha=i, \beta=1$ 则 $\bar{\alpha}=-i$，有$(Qx, y)-(Qy, x)=0$，从而$(Qx, y)=0$，由(1)知 $Q=0$. $\square$

伴随算子有如下性质：

设 $S: H_1 \to H_2$, $T: H_1 \to H_2$ 都是有界线性算子，H_1, H_2 为 Hilbert 空间，α 为数，S^*, T^* 分别为 S 与 T 的伴随算子，则

(1) $(T^* y, x)=(y, Tx)(\forall\ x \in H_1, y \in H_2)$;

(2) $(S+T)^*=S^*+T^*$;

(3) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$;

(4) $(T^*)^*=T$;

(5) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$;

(6) $T^*T=0 \Leftrightarrow T=0$;

(7) 设 $H_1=H_2$，则$(ST)^*=T^*S^*$.

证明 (1)由 T^* 的定义，$\forall\ x \in H_1, y \in H_2, (Tx, y)=(x, T^*y)$，从而$\overline{(Tx, y)}=\overline{(x, T^*y)}$，即$(y, Tx)=(T^*y, x)$.

(2) $\forall\ x\in H_1, y\in H_2, (Sx,y)=(x,S^*y), (Tx,y)=(x,T^*y)$，从而 $((S+T)x,y)=(Sx,y)+(Tx,y)=(x,S^*y)+(x,T^*y)=(x,(S^*+T^*)y)$. 故 $(S+T)^*=S^*+T^*$.

(3)记 $Q=(\alpha T)^*-\bar{\alpha}T^*$，要证 $Q=0$. $\forall\ x\in H_1, y\in H_2$，由(1)，

$$\begin{aligned}(Qy,x) &= ((\alpha T)^*y-(\bar{\alpha}T^*)y,x)\\ &= ((\alpha T)^*y,x)-((\bar{\alpha}T^*)y,x)\\ &= (y,(\alpha T)x)-\bar{\alpha}(y,Tx)\\ &= \bar{\alpha}(y,Tx)-\bar{\alpha}(y,Tx)=0\end{aligned}$$

因此，$\forall\ y\in H_2$，取 $x=Qy$，则 $(Qy,Qy)=0$，因此 $Qy=0$，故 $Q=0$，从而 $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$.

(4)，(6)，(7)的证略，往证(5)。

(5)由算子的复合知 $T^*T:H_1\to H_1$，而 $TT^*:H_2\to H_2$. 由 Schwarz 不等式，得

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= (Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\\ &\leqslant \|T^*Tx\|\ \|x\| \leqslant \|T^*T\|\ \|x\|^2\end{aligned}$$

于是 $\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$.

又由 $\|T^*\|=\|T\|$ 及 $\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\ \|T\|=\|T\|^2$ 知 $\|T^*T\|=\|T\|^2$. 再用 T^* 代替 T，得 $\|(T^*)^*T^*\|=\|T\|^2$，所以

$$\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2 \qquad \square$$

定义 5.29 设 T 是 Hilbert 空间 $H\to H$ 的有界线性算子，如果 $T^*=T$，则称 T 是**自伴算子**(或称**自共轭算子**)。

定理 5.48 设 T 是复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，则 T 是自伴算子的充分必要条件是 $\forall\ x\in H$，(Tx,x) 是实数。

证明 如果 T 是自伴算子，则对一切 $x\in H$，

$$\overline{(Tx,x)}=(x,Tx)=(Tx,x)$$

因此 (Tx,x) 是实的。

反之，设 $\forall\ x\in H$，(Tx,x) 是实的，则

$$(Tx,x)=\overline{(Tx,x)}=\overline{(x,T^*x)}=(T^*x,x)$$

因此

$$(Tx-T^*x,x)=0$$

由引理 5.47 知

$$T=T^*$$ □

定理 5.49 设$\{T_n\}$是 Hilbert 空间H上的自伴算子序列，T_n：$H\to H$，$n=1,2,\cdots$，设$\{T_n\}$强收敛，即$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则$T$也是$H$上的自伴算子。

证明 由范数的三角不等式及$T_n^*=T_n$与$\|T^*\|=\|T\|$得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\|T-T^*\|\\&\leqslant\|T-T_n\|+\|T_n-T_n^*\|+\|T_n^*-T^*\|\\&=\|T-T_n\|+\|T_n-T\|\\&=2\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以$\|T-T^*\|=0$，从而$T=T^*$，故T为自伴算子。 □

§5.4.5 投影算子

在本节的最后，我们介绍一类在函数逼近论，自动控制，滤波理论中极其重要的有界线性算子——投影算子。此处只介绍投影算子的概念及其重要性质与判别条件。

当H是 Hilbert 空间时，投影定理(定理 5.39)可改述如下：设L是 Hilbert 空间H的闭线性子空间，则$\forall\ x\in H$，存在唯一的$y\in L$，及$z\perp L$，使得$x=y+z$. 此时称y为x在L上的投影。

定义 5.30 设L是 Hilbert 空间H的一个闭线性子空间，算子P_L定义为：$\forall\ x\in H$，P_Lx为x在L上的投影。称P_L为H到L上的**投影算子**。

例 5-24 设n维内积空间E^n，L是E^n中m维线性子空间(一定是闭的)，求出投影算子P_L的表示式。

解 设 L 的一组规范正交基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，在 $L^{\perp}$ 中再添加 $\{e_{m+1},\cdots,e_n\}$ 使得 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 成为 E^n 的规范正交基。则

$$P_L e_i = \begin{cases} e_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ 0, & i = m+1,\cdots,n \end{cases}$$

记 $\alpha_{ij}=(P_L e_i, e_j)=1,2,\cdots,n$，则

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ 或 } i = j, i = m+1,\cdots,n, \\ 1, & i = j, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

令 $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$，则 $Ax \in E^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, P_L x = \sum_{i=1}^{n} x_i P_L e_i = \sum_{i=1}^{m} x_i P_L e_i = Ax$，故 P_L 对应着矩阵 A. □

投影算子的性质：

设 P_L 是 Hilbert 空间到其闭线性子空间 L 上的投影算子，则

(1) P_L 是有界线性算子；

(2) $\| P_L \| = 0$ 或 1；

(3) $P_L x = x$ 当且仅当 $x \in L$；$P_L x = 0$ 当且仅当 $x \perp L$.

证明 (1)$\forall\ x_1, x_2 \in H, x_1 = P_L x_1 + z_1, x_2 = P_L x_2 + z_2, z_i \perp L, i = 1,2$. $\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha P_L x_1 + \beta P_L x_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)$，且

$$\alpha P_L x_1 + \beta P_L x_2 \in L, \alpha z_1 + \beta z_2 \perp L$$

所以 $P_L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P_L x_1 + \beta P_L x_2$. 故 P_L 是线性的。又当 $x \in H$ 时，$x = P_L x + x - P_L x, P_L x \perp x - P_L x$，于是 $\| x \|^2 = \| P_L x \|^2 + \| x - P_L x \|^2$，故 $\| P_L x \| \leqslant \| x \|^2$，于是 $\| P_L \| \leqslant 1$，从而 P_L 是有界的。

(2)当 $L = \{0\}$ 时，则$\forall\ x \in H, P_L x = 0, \| P_L \| = 0$. 当 $L \neq \{0\}$ 时，有 $x \neq 0, x \in L$，则 $P_L x = x$，故 $\| P_L \| = 1$.

(3)证略。 □

定理 5.50 设 P 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，则 P 是投影算子的充分必要条件是：P 为幂等(即 $P^2 = P$)的自伴算子。

证明 设 P 是 H 到其闭线性子空间 L 上的投影算子，$\forall\ x_1, x_2 \in H$，有

$$x_i = Px_i + z_i, z_i \perp L, Px_i \in L, i = 1,2$$

由 $(Px_1, z_2) = (z_1, Px_2) = 0$ 得

$$(Px_1, x_2) = (Px_1, Px_2 + z_2) = (Px_1, Px_2) + (Px_1, z_2)$$
$$= (Px_1, Px_2) = (Px_1 + z_1, Px_2) = (x_1, Px_2)$$

故 P 是自伴算子，即 $P^* = P$.

由 $P(Px) = Px$（因 $Px \in L$）知 $P^2 = P$，P 是幂等的。

反之，设 P 是有界线性算子，且 $P = P^* = P^2$. 记 $L = N(I-P) = \{x \mid (I-P)x = 0\}$，其中 I 为恒等算子。由于 $I-P$ 为连续线性算子，则 L 是 H 的闭线性子空间，往证 P 是 H 到 L 上的投影算子。

事实上，$\forall\ x \in H$，则 $x = Px + (I-P)x$，由于 $(I-P)Px = Px - P^2x = 0 (P^2 = P)$，故 $Px \in L$，$\forall\ y \in L$，$((I-P)x, y) = (x, (I-P)y) = 0 (P = P^* \Rightarrow (I-P)^* = I-P)$. 所以 $(I-P)x \perp L$. 因此 Px 是 x 在 L 上的投影，从而 P 是 H 到 L 上的投影算子。 □

定理 5.51 设 P 是复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，则 P 成为投影算子的充要条件是：$\forall\ x \in H$，有 $\| Px \|^2 = (Px, x)$.

证明 设 P 是投影算子，则由定理 5.50 知 $P = P^* = P^2$，从而 $\forall\ x \in H$，

$$\| Px \|^2 = (Px, Px) = (P^* Px, x) = (P^2x, x) = (Px, x)$$

必要性得证。

反之，设 $\forall\ x \in H$，$\| Px \|^2 = (Px, x)$，由定理 5.48 知，P 是自伴算子，即 $P = P^*$，由于 $(Px, x) = \| Px \|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x)$，记 $A = P - P^2$，则 $\forall\ x \in H$，$(Ax, x) = (Px - P^2x, x) = (Px, x) - (P^2x, x) = 0$，故由引理 5.47 知，$P = P^2$. □

对投影算子的运算，有 P_LP_M，$P_L + P_M$，$P_L - P_M$ 等运算。

定理 5.52 设 P_L, P_M 是两个投影算子，则 $L \perp M \Leftrightarrow P_LP_M = 0$.

证明 必要性。设 $L\perp M$，则$\forall\ x\in H, P_Mx\in M$，从而 $P_Mx\perp L$，于是 $P_L(P_Mx)=0$. 故 $P_LP_M=0$.

充分性。设 $P_LP_M=0$，则$\forall\ x\in M, P_Lx=P_L(P_Mx)=0$，故 $x\perp L$，因此 $L\perp M$. □

定理 5.53 设 P_L, P_M 是两个投影算子，则 P_L+P_M 是投影算子的充要条件是 $P_LP_M=0$，且当 P_L+P_M 是投影算子时，有 $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$.

证明 当 P_L+P_M 是投影算子时，由定理 5.50 知 P_L+P_M 是幂等的，即$(P_L+P_M)^2=P_L+P_M$. 从而

$$P_L+P_M=(P_L+P_M)^2=P_2^2+P_LP_M+P_MP_L+P_M^2$$
$$=P_L+P_LP_M+P_MP_L+P_M$$

于是 $P_LP_M+P_MP_L=0$，分别左乘与右乘 P_L 得

$$P_LP_M+P_LP_MP_L=0, P_LP_MP_L+P_MP_L=0$$

由此二式可得 $P_LP_M=P_MP_L$. 再由 $P_LP_M+P_MP_L=0$，得 $P_LP_M=0$. 必要性得证。往证充分性。

如果 $P_LP_M=0$，则由定理 5.50，有 $0=P_LP_M=(P_LP_M)^*=P_M^*P_L^*=P_MP_L$，于是

$$(P_L+P_M)^2=P_L^2+P_LP_M+P_MP_L+P_M^2=P_L+P_M$$

又 $\|P_L+P_M\|\leqslant\|P_L\|+\|P_M\|$，$(P_L+P_M)^*=P_L^*+P_M^*=P_L+P_M$，故 P_L+P_M 是幂等的自伴算子，从而由定理 5.50 知 P_L+P_M 是投影算子。

最后证明：当 P_L+P_M 是投影算子时，$P_L+P_M=P_{L\oplus M}$. 因为当 P_L+P_M 是投影算子时，由前一部分已知 $P_LP_M=0$，由定理 5.52 知 $L\perp M$，故 $L\oplus M=\{x_1+x_2\mid x_1\in L, x_2\in M\}$是直交和。

对 $x\in L, x\perp M$，故$(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=P_Lx=x$，$\forall\ y\in M, y\perp L$，$(P_L+P_M)y=P_Ly+P_My=P_My=y$，因此，$\forall\ x\in L\oplus M$，$(P_L+P_M)x=x$，而$\forall\ z\perp L\oplus M$，则 $z\perp L, z\perp M$，从而$(P_L+P_M)z=P_Lz+P_Mz=0$. 因此，$\forall\ x\in H$，由于 $L\oplus M$ 是 H 的闭线性子空

间，所以，$x=y+z$，$y\in L\oplus M$，$y=x_1+x_2$，$x_1\in L$，$x_2\in M$，$z\in L\oplus M$，$z\perp L$，$z\perp M$，于是 $P_{L\oplus M}x=x_1+x_2$. 又由于 $x_1\in L$，$x_2\perp L$，$z\perp L$，故 $P_Lz=0$，所以 $P_Lx=x_1$. 同理，$P_Mx=x_2$. 因此，$(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=P_{L\oplus M}x$，从而 $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$. □

定义 5.31 称两个投影算子 P 和 Q 是正交的，如果 $PQ=0$，记为 $P\perp Q$. 根据定理 5.52 知，两个投影算子 P 和 Q 正交的充分必要条件是其投影子空间正交。由定理 5.53 知，两个投影算子 P 和 Q 之和 $P+Q$ 是投影算子的充分必要条件是 P 与 Q 正交，且此时 $P+Q$ 是 P 与 Q 的投影子空间的直交和上的投影算子。这个结果可推广到两两正交的投影算子序列的无穷和的情况。

定理 5.54 设 P_n，$n=1,2,\cdots$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两正交的投影算子，则必有投影算子 P 使得 $\forall\ x\in H$ 有

$$Px=\sum_{i=1}^{\infty}P_ix \tag{5-40}$$

证明 设 $Q_n=\sum_{i=1}^{n}P_i$，首先要证明：对于任意 $x\in H$，存在 $y\in H$，使得 $\|Q_nx-y\|\to 0(n\to\infty)$.

因 P_n 两两正交，由定理 5.53 知，Q_n 为

$$\bigoplus_{i=1}^{n}L_i=\{x_1+x_2+\cdots+x_n\,|\,x_i\in L_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

上的投影算子，其中 L_i 为 P_i 的投影子空间，$i=1,2,\cdots$. 故 $\forall\ x\in H$，

$$\|x\|^2\geqslant\|Q_nx\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}P_ix\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|P_ix\|^2$$

从而 $\sum_{i=1}^{\infty}\|P_ix\|^2$ 收敛，因此，$\sum_{i=m}^{n}\|P_ix\|^2\to 0(n\to\infty,m\to\infty)$. 往证 $\{Q_nx\}$ 为 H 中 Cauchy 列，这由

$$\|Q_nx-Q_mx\|^2=\sum_{m+1}^{n}\|P_ix\|^2\to 0(m\to\infty,n\to\infty)$$

得知。因此，存在唯一的 $y\in H$ 使得 $\| Q_n x - y \| \to 0,(n\to\infty)$. 记 $y = Px$，P 是线性算子，且由于

$$\| Px \| = \| y \| = \lim_{n\to\infty} \| Q_n x \| \leqslant \| x \|$$

$\| P \| \leqslant 1$，故 P 是有界的。

$\forall\ x\in H$，由(5－40)式，

$$\| Px \|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} P_i x \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \| P_i x \|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P_i x, x) = (Px, x)$$

由定理 5.51 知，P 是投影算子。 □

由定理 5.54 定义的投影算子 $P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i$ 的投影子空间的结构如何呢?记

$$L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mid x_i \in L_i, i = 1,2,\cdots, \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^2 < \infty \right\}$$

如果定理 5.54 中 P_i 的投影子空间为 L_i，则定理 5.54 中的 P 为 $P_{\oplus_{i=1}^{\infty} L_i} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{L_i}$，这里 $\sum_{i=1}^{\infty} P_{L_i}$ 是指按算子范数的收敛，即强收敛。

事实上，当 $x \in H$ 时，

$$\| Px \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \| P_{L_i} x \|^2, P_{L_i} x \in L_i, i = 1,2\cdots$$

所以

$$Px \in L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$$

因此 $\{x \mid Px = x\} \subseteq L$. 反之，$\forall\ x\in L$，记 $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$，这里 $x_i \in L_i$，$i = 1,2,\cdots, \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^2 < \infty$. 由 $\{L_n\}$ 的两两正交性，有

$$P_{L_k} x_n = \begin{cases} x_k, k = n; \\ 0,\ k \neq n \end{cases}$$

故 $P_{L_k}x=\sum_{n=1}^{\infty}P_{L_k}x_n=x_k\in L_k$,因此,$Px=\sum_{n=1}^{\infty}P_{L_k}x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x$,所以 $L=\{x|Px=x\}$. 故 P 是 L 上的投影算子 。 □

关于两个投影算子 P_L 与 P_M 的乘积 P_LP_M,有下述结果:

定理 5.55　设 P_L,P_M 是 Hilbert 空间 H 上的两个投影算子,则 P_LP_M 成为投影算子当且仅当 $P_LP_M=P_MP_L$. 且当 P_LP_M 是投影算子时,$P_LP_M=P_{L\cap M}$.

证明　当 P_LP_M 是投影算子时,由定理 5.50 知,P_LP_M 是自伴算子,即

$$P_LP_M=(P_LP_M)^*=P_M^*P_L^*=P_MP_L$$

反之,当 $P_LP_M=P_MP_L$ 时,则有 $(P_LP_M)^*=P_M^*P_L^*=P_MP_L=P_LP_M$. 又 $(P_LP_M)^2=P_LP_MP_LP_M=P_L^2P_M^2=P_LP_M$,由定理 5.50 知,$P_LP_M$ 是投影算子。

最后,当 P_LP_M 是投影算子时,若 $x\in L\cap M$,则 $P_LP_Mx=P_Lx=x$. 反之,若 $x\in H$,使得 $P_LP_Mx=x$,则 $x\in L$,又 $x=P_MP_Lx$,$\Rightarrow x\in M$,从而 $x\in L\cap M$,因此,

$$L\cap M=\{x|P_LP_Mx=x\}$$

故

$$P_LP_M=P_{L\cap M}$$

□

我们以介绍 P_L-P_M 结束本节内容。

定义 5.32　设 L,M 是 Hilbert 空间 H 的两个闭线性子空间,且 $L\supset M$,L 中与 M 正交的向量全体称为 M 在 L 中的正交补,记 $L\ominus M$,则

$$L\ominus M=\{x|x\in L \text{ 且 } x\perp M\}=L\cap M^{\perp}$$

定理 5.56　设 P_L,P_M 是两个投影算子,则 P_L-P_M 是投影算子的充要条件是 $L\supset M$. 当 P_L-P_M 是投影算子时,$P_L-P_M=P_{L\ominus M}$.

证明 设 P_L-P_M 是投影算子，又 $P_L=(P_L-P_M)+P_M$ 是投影算子，由定理 5.53 知 $(P_L-P_M)P_M=0$，因此 $P_LP_M=P_M$，故 $M\subseteq L$，这是因为 $\forall\ x\in M, P_Mx=x$，从而 $P_Lx=P_L(P_Mx)=P_Mx=x$，所以 $x\in L$，于是，$M\subseteq L$.

反之，设 $L\supset M$，$\forall\ x\in H$，$P_Mx\in M\subseteq L$，所以 $P_L(P_Mx)=P_Mx$，故 $P_LP_M=P_M$. 于是

$$(P_L-P_M)^2=P_L^2-P_LP_M-P_MP_L+P_M^2=P_L-P_M$$

又显然有 $(P_L-P_M)^*=P_L^*-P_M^*=P_L-P_M$，由定理 5.50 知 P_L-P_M 是投影算子。充分性得证。

又当 P_L-P_M 是投影算子时，记其投影子空间为 L_1，即 $P_L-P_M=P_{L_1}$，从而 $P_{L_1}+P_M=P_L$ 是投影算子。

由定理 5.53 知 $L_1\oplus M=L$，由此推知 $L_1=L\ominus M$. □

由定理 5.56 易知，当 P_L 是由 Hilbert 空间 H 到它的闭线性子空间 L 上的投影算子时，$I-P_L$ 是 H 到 $L^\perp$ 上的投影算子。

§5.5 最佳逼近与泛函极值

§5.5.1 最佳逼近问题

我们从一个具体例子开始。

例 5-25 设 $x(t)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，即 $x\in C([a,b])$ 现要用一个 n 次多次式 $P_n(t)$ 近似 $x(t)$，使得对任意 n 次多项式 $y(t)$，有

$$\max_{t\in J}|x(t)-P_n(t)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \quad (5-41)$$

其中 $J=[a,b]$.

把上述问题叙述成为赋范空间的最佳逼近问题如下：记 $C([a,b])$ 为 $[a,b]$ 上连续函数全体，$C([a,b])$ 上范数定义为

$$\|x\| = \max_{t\in J}|x(t)|$$

$x\in C([a,b])$. 设 $x_j(t)=t^j, j=0,1,2,\cdots,n, t\in J$. 记 $Y=\text{span}\{x_0(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)\}$，则 Y 是 $C([a,b])$ 的闭线性子空间，(5－41)式相当于

$$\|x-P_n\| = \inf_{y\in M}\|x-y\| \qquad (5-42)$$

这样的逼近称为一致逼近。这里有两个问题需要考虑：一是关于 P_n 的存在性问题，即是否存在 $P_n\in Y$，使得(5－42)式成立，二是使得(5－42)式成立的 P_n 是否唯一。

下面，我们先对一般的赋范空间解决最佳逼近的存在性与唯一性问题，然后求解 $C([a,b])$ 中的一致逼近与 $L^2([a,b])$ 的平方平均逼近问题。

定义 5.33　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，Y 是 X 的子空间，$\delta=\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|$ 是 x 到 Y 的距离，记为 $d(x,Y)$. 如果存在 $y_0\in Y$，使得 $\|x-y_0\|=\delta$，则称 y_0 是 x 在 Y 中的最佳逼近。

定理 5.57　如果 Y 是赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的有限维子空间，则对每个 $x\in X$，存在 Y 中关于 x 的最佳逼近。

证明　设给定 $x\in X$，令

$$B=\{y\in Y \mid \|y\|\leqslant 2\|x\|\}$$

则 $\theta\in B$，且

$$d(x,B)=\inf_{y\in B}\|x-y\|\leqslant\|x\|$$

又当 $y\in Y$ 但 $y\notin B$ 时，$\|y\|>2\|x\|$，从而

$$\|x-y\|\geqslant\|y\|-\|x\|>\|x\|\geqslant d(x,B)$$

故 $d(x,Y)=d(x,B)\triangleq\delta$，且此值只能在 B 中达到。因 B 是有限维空间中有界闭子集，故 B 是紧集，而 $f(y)=\|x-y\|\ (y\in B)$ 在 B 上是连续的，根据紧集上连续函数在该紧集上一定可取得最小值

与最大值的性质知，存在 $y_0 \in B \subseteq Y$，使得 $\| x - y_0 \| = \inf\limits_{y \in B} \| x - y \| = d(x, B)$. 故 y_0 是 x 在 Y 中的最佳逼近。 □

根据定理 5.57，在例 5-26 中，$\forall\ x \in C([a,b])$，x 在 $Y = \text{span}\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ 中的最佳逼近 $P_n(t)$ 是存在的。但是否唯一呢？为此，下面研究唯一性的条件。

回忆线性空间 X 的子集 M 叫做凸集的定义，若 $y, z \in M$，则 $\forall\ \alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \alpha y + (1-\alpha) z \in M$.

在赋范线性空间$(X, \| \cdot \|)$中，设 $x \in X$，则 x 在子空间 Y 中的最佳逼近的全体 M 是一凸集。事实上，设 $y, z \in M$，则 $\| x - y \| = \| x - z \| = \delta$. $\forall\ \alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，记 $v = \alpha y + (1-\alpha) x$，易知 $v \in Y$，故 $\| x - v \| \geqslant \delta$. 又

$$
\begin{aligned}
\| x - v \| &= \| \alpha(x - y) + (1 - \alpha)(x - z) \| \\
&\leqslant \alpha \| x - y \| + (1 - \alpha) \| x - z \| = \delta
\end{aligned}
$$

所以 $\| x - v \| = \delta$，故 $v \in M$.

而 M 含于闭球面 $\bar{\beta} = \{ y \mid \| x - y \| = \delta, y \in Y \}$ 上，若 x 在 Y 中有两个不同的最佳逼近 y, z，则 M 包含直线段 $\alpha y + (1-\alpha) z$，$(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，而这直线段在闭球面 $\bar{\beta}$ 上。若 X 中范数 $\| \cdot \|$，使得闭球面不含直线段的话，则最佳逼近是唯一的。

X 上范数 $\| \cdot \|$ 若满足：$\forall\ x \in X, y \in Y$，$\| x \| = \| y \| = 1$，$x \neq y$，有 $\| x + y \| < 2$，则称 $\| \cdot \|$ 为严格凸范数，$(X, \| \cdot \|)$被称为严格凸赋范空间。这样，在严格凸的赋范空间中，任意半径为 δ 的闭球面上不会有直线段，因此，$\forall\ x \in X$，x 在其子空间 Y 中的最佳逼近若存在，则必唯一。由此易知

定理 5.58 设 Y 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则$\forall\ x \in H$，x 在 Y 中的最佳逼近唯一存在。

证明 根据投影定理，x 在 Y 中的最佳逼近是 $P_Y x$，P_Y 为 H 到 Y 的投影算子。

其次，H 是严格凸的赋范空间。事实上，$\forall\ x, y \in H$，若 $\| x \|$

$=1$，$\|y\|=1$，$x\neq y$，由平行四边形公式，记 $\|x-y\|=\alpha>0$，

$$\|x+y\|^2=-\|x-y\|^2+2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$
$$=-\alpha^2+2(1+1)<4$$

所以 $\|x+y\|<2$，故 H 是严格凸的赋范空间。因此，x 在 Y 中的最佳逼近是唯一的。 □

对于 $C([a,b])$ 中范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$，$(C([a,b]),\|\cdot\|)$ 不是严格凸的，因为对 $x_1(t)=1$，$x_2(t)=\dfrac{t-z}{b-a}$，$t\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$，$\|x_1\|=\|x_2\|=1$. 但 $\|x_1+x_2\|=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|1+\dfrac{t-a}{b-a}\right|=2$.

如果对 $C([a,b])$ 的有限维子空间 Y 加上如下的 Haar 条件，则 $x\in C([a,b])$ 在 Y 中的最佳逼近是唯一的，而且 Haar 条件也是必要的。

Haar 条件：设 Y 是 $C([a,b])$ 的有限维子空间，若 $\forall\ y\in Y$，$y\neq 0$，y 在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点，这里 $n=\dim Y$，则称 Y 满足 Haar 条件。

注 Haar 条件等价于条件：对 Y 的每一组基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 及 $t_i\in[a,b]$，$i=1,2,\cdots,n$，$t_i\neq t_j(i\neq j)$，有

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \cdots & y_1(t_n) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \cdots & y_2(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \cdots & y_n(t_n) \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (5-43)$$

这是因为 Haar 条件指：$\forall\ y\in Y$，$y=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$，当 y 有 n 个以上的零点 $(t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots)$ 时，$y=0$，即 $\alpha_k=0$，$k=1,2,\cdots,n$ 这意味着方程组

$$y(t_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k(t_j)=0,\ j=1,2,\cdots,n$$

只有零解，这当且仅当 $\Delta\neq 0$.

引理 5.59 设空间$C([a,b])$的有限维子空间Y满足Haar条件，若对$x\in C([a,b])$，$y\in Y$，$x-y$少于$n+1$个最值点，则y不是x在Y中的最佳逼近，其中$n=\dim Y$.

证明 设$x-y$有m个最值点$t_1,t_2,\cdots,t_m$，则$m\leqslant n$，当$m<n$时，可在$[a,b]$中添加一些点，使得有$t_1,t_2,\cdots,t_n$. 设$y_1,\cdots,y_n$为Y的一组基，因Y满足Haar条件，故(5—43)中$\Delta\neq 0$，于是方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k(t_i)=x(t_i)-y(t_i),i=1,2,\cdots,n$$

有唯一解$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，令

$$y_0=\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k,\tilde{y}=y+\varepsilon y_0\in Y(\varepsilon>0),\tilde{v}=x-\tilde{y},$$

往证：当$\varepsilon>0$，充分小时，有$\|\tilde{v}\|<\|v\|$. 故y不是x在Y中的最佳逼近。

在最值点处，$|v(t_i)|=\|v\|>0(v=x-y\neq 0)$. 由于$y_0(t_i)=v(t_i)$，$i=1,2,\cdots,n$及连续性，对每个$t_i$，存在邻域$\mathscr{N}_i$，使得在$\mathscr{N}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{N}_i$中有

$$\mu=\inf_{t\in\mathscr{N}}|v(t)|>0,\inf_{t\in\mathscr{N}}|y_0(t)|>\frac{1}{2}\|v\|\ (*)$$

因为$y_0(t_i)=v(t_i)\neq 0$，故对一切$t\in\mathscr{N}$，$y_0(t)/v(t)>0$，且由$(*)$式得

$$\frac{y_0(t)}{v(t)}=\frac{|y_0(t)|}{|v(t)|}\geqslant\frac{\inf|y_0(t)|}{\|v\|}\geqslant\frac{1}{2}$$

令$M_0=\sup_{t\in\mathscr{N}}|y_0(t)|$，则对于任意正数$\varepsilon<\frac{\mu}{M}$，对每个$t\in\mathscr{N}$，

$$\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)}=\frac{\varepsilon|y_0(t)|}{|v(t)|}\leqslant\frac{\varepsilon M_0}{\mu}<1$$

由于$\tilde{v}=v-\varepsilon y0$，故$\forall\ t\in\mathscr{N}$，$0<\varepsilon<\mu/M_0$，有

$$|\tilde{v}(t)|=|v(t)-\varepsilon y_0(t)|=|v(t)|(1-\frac{\varepsilon y_0(t)}{v(t)})$$

$$\leqslant \|v\|(1-\frac{\varepsilon}{2})<\|v\|$$

记$K=[a,b]\backslash\mathcal{N}$,定义$M_1=\sup_{t\in K}|y_0(t)|$,$M_2=\sup_{t\in K}|v(t)|$. 因$\mathcal{N}$包含$v$的一切最值点,故$M_2<\|v\|$且$\|v\|=M_2+\eta(\eta>0)$. 取正数$\varepsilon<\eta/M_1$,则$\forall\ t\in K$,

$$|\tilde{v}(t)|\leqslant v(t)|+\varepsilon|y_0(t)|\leqslant M_2+\varepsilon M_1<M_2+\eta=\|v\|$$

从而$\|\tilde{v}\|<\|v\|$. □

定理 5.60(Haar **唯一性定理**) 设Y是空间$C([a,b])$的n(n有限)维子空间,则对每个$x\in C([a,b])$在Y中的最佳逼近唯一的充分必要条件是Y满足Haar条件。

证明 先证充分性。设Y满足Haar条件,$y_1\in Y,y_2\in Y,y_1,y_2$都是$C([a,b])$中某固定$x$的最佳逼近,记$v_i=x-y_i,i=1,2$. 则有$\|v_1\|=\|v_2\|=\delta=d(x,Y)$,因$x$的最佳逼近全体是凸集,故$y=\frac{y_1+y_2}{2}$也是$x$在$Y$中的最佳逼近,由引理5.59知,$v=x-y=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$至少有$n+1$个最值点$t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$使得$|v(t_j)|=\|v\|=\delta$,从而

$$2v(t_j)=v_1(t_j)+v_2(t_j)=2\delta\text{ 或 }-2\delta$$

而$|v_1(t_j)|\leqslant\|v_1\|=\delta$,$|v_2(t_j)|\leqslant\|v_2\|=\delta$,由上式,

$$v_1(t_j)=v_2(t_j)=\delta\text{ 或 }-\delta,j=1,2,\cdots,n+1$$

因此,$y_1-y_2=v_2-v_1$,在$[a,b]$有$n+1$点。根据Haar条件($y_1-y_2\in Y$)知,$y_1-y_2=0$,故$y_1=y_2$. 充分性得证。

往证必要性。如果Y不满足Haar条件,由(5-43)式知,存在Y的一个基$y_1,y_2,\cdots,y_n$和$t_j\in[a,b],j=1,2,\cdots,n$,使得(5-43)式中$\Delta=0$,因此,齐次方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k(t_j)=0,j=1,2,\cdots,n$$

有非零解 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 令 $y_0=\sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k$,则 $y_0\neq 0$ 且 $y_0(t_j)=0,j=1,2,\cdots,n$. 设 λ 使得 $\|\lambda y_0\|\leqslant 1$,又方程组

$$\sum_{k=1}^{n} r_k y_j(t_k)=0,j=1,2,\cdots,n$$

也有非零解 $r_1,r_2,\cdots,r_n$. $\forall\ y\in Y$,则 $y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$(因 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是 Y 的一组基),且

$$\sum_{k=1}^{n} r_k y(t_k)=\sum_{k=1}^{n} r_k\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j(t_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k y_j(t_k)\Big)=0 \tag{5-44}$$

作 $z\in C([a,b])$ 满足如下条件:

$$z(t_j)=\text{sgn}r_j=\begin{cases}-1, r_j<0,\\ 1 \quad r_j\geqslant 0\end{cases}$$

且 $\|z\|=1$. 记 $x(t)=z(t)(1-|\lambda y_0(t)|)$,则 $x\in C([a,b])$,易知 $x(t_j)=z(t_j)$, $\|x\|=1,x\in Y$.

因 $|z(t)|\leqslant\|z\|=1$, $|\lambda y_0(t)|\leqslant\|\lambda y_0\|\leqslant 1$, $\forall\ \varepsilon\in[-1,1]$,有

$$\begin{aligned}|x(t)-\varepsilon\lambda y_0(t)| &\leqslant \|x(t)\|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\ &=|z(t)|(1-|\lambda y_0(t)|+|\varepsilon\lambda y_0(t)|\\ &=1-(1-|\varepsilon|)|\lambda y_0(t)|\leqslant 1,\end{aligned}$$

故当 $\|x-y\|\geqslant 1(y\in Y)$时,对每个 $\varepsilon\in[-1,1]$,$\varepsilon\lambda y_0$ 都是 x 在 Y 中的最佳逼近。往证$\forall\ y\in Y$, $\|x-y\|\geqslant 1$. 倘若不然,存在 $\tilde{y}\in Y$,使得 $\|x-\tilde{y}\|<1$,则由

$$x(t_j)=\text{sgn}r_j=\pm 1$$

及 $|x(t_j)-\tilde{y}(t_j)|\leqslant\|x-\tilde{y}\|<1$ 知

$$\text{sgn}\tilde{y}(t_j)=\text{sgn}x(t_j)=\text{sgn}r_j$$

从而由(5-43)式, $\sum_{j=1}^{n} r_j\tilde{y}(t_j)=\sum_{j=1}^{n} r_j\text{sgn}r_j=\sum_{j=1}^{n}|r_j|=0$,于是 r_j

$= 0, j = 1,2,\cdots,n$ 但 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为非零解。故必 $\forall\ y \in Y$，$\|x - y\| \geqslant 1$. 因此，$x \in C([a,b])$ 在 Y 中的最佳逼近不唯一。所以，当唯一性成立时，Haar 条件必成立。 □

注 1 当 Y 是次数不超过 n 的多项式(包括 $y = 0$) 全体时，Y 是满足 Haar 条件的，且 $\dim Y_n = n + 1$. 因此，$C([a,b])$ 中任意 x 在 Y_n 中的最佳逼近是唯一存在的。设 P_n 是 x 在 Y_n 中的最佳逼近 $\delta_n = \|x - P_n\|$，由 $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots$，故 δ_n 单调减少，根据 Weierstrass 定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

注 2 由上所述知，$\forall\ x \in C([a,b])$，x 在 Y_n 中的最佳逼近 P_n 唯一地存在。但对 $x \in C([a,b])$，如何求得 P_n 却是个比较困难的问题。当 $x = t^n$ 且 $[a,b] = [-1,1]$ 时，x 在 $Y_{n-1} = \mathrm{span}\{y, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$ 中的最佳逼近是

$$y_0(t) = x(t) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)\,(n \geqslant 1)$$

其中 $T_n(t)$ 为 Chebyshev 多项式：

$$T_n(t) = \cos n(\arccos t), t \in [-1,1]$$

详细可参阅[8].

§5.5.2 泛函的极值

定义 5.34 设 X 为 Banach 空间，泛函 f 在 $x_0 \in X$ 的某邻域 $N_\delta(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$ 内有定义，如果存在 x_0 的一个邻域 $N_\eta(x_0) \subseteq N_\delta(x_0)$，使得

$$f(x) \geqslant f(x_0)\,(f(x) \leqslant f(x_0))\,(x_0 \in N_\eta(x_0))$$

则称 x_0 为 f 的局部极小(大)点，$f(x_0)$ 称为 f 的局部极小(大)值。

对于微积分中的一元函数 $f(x)$ 的极值的存在性，我们是用微分公式 $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\,(x \to x_0)$ 来研究的。当 f 是泛函的时候，需要将微分概念作一些推广。为此，我们

引进一个算子是 Gateaux(加脱)可微的概念如下:

定义 5.35 设 X,Y 都是 Banach 空间,$x_0\in X$,算子 $T:X\to Y$ 在 x_0 的某个邻域内有定义,若$\forall\ h\in X$,极限

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{T(x_0+\alpha h)-T(x_0)}{\alpha}\triangleq \delta T(x_0;h) \qquad (5-45)$$

存在,即

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\|\frac{T(x_0+\alpha h)-T(x_0)}{\alpha}-\delta T(x_0;h)\right\|=0 \quad (5-46)$$

则称 $\delta T(x_0;h)$ 为算子 T 在 x_0 处关于增量 h 的一阶变分。进而,如果 $\delta T(x_0;h)$ 关于 h 是有界线性算子,此时称算子 T 在 x_0 处是 Gateaux(加脱)可微的。

注 1 当 f 是 Hilbert 空间 X 上的泛函时,如果 f 在 $x_0\in X$ 处是 Gateaux 可微的,即极限

$$\inf_{\alpha\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha}\triangleq \delta f(x_0;h)$$

存在且为 h 的有界线性泛函,而由 Riesz 表示定理(定理 5.45),存在唯一的 $f'(x_0)\in X^*$,使得

$$\delta f(x_0;h)=(f'(x_0),h)$$

且 $\|\delta f(x_0;h)\|=\|f'(x_0\|$. 因此,称 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 处的 Gateaux 导数。

注 2 当 $X=\mathbf{R}^n$ 时,$\mathbf{R}^n$ 上泛函便是 n 元函数 $f(x)=f=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,对 $x_0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\cdots,\xi_n^0)\in\mathbf{R}^n$,$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbf{R}^n$,有

$$\begin{aligned}\delta f(x_0;h)&=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha}\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\right)\Big|_{\overline{x_0}}=(\operatorname{grad}f|_{x_0},h)\end{aligned}$$

可见,泛函 f 在 $x_0\in X$ 处的 Gateaux 导数 $f'(x_0)$ 是多元函数的梯度概念的推广。

类似于多元函数,给出泛函取局部极值的必要条件如下:

定理 5.61 设 f 是定义在 Banach 空间 X 上的泛函，且 f 在 x_0 处具有一阶变分 $\delta f(x_0;h)$，则 x_0 为 f 的局部极值点的必要条件是 $\delta f(x_0;h)=0$.

证明 对于任意 $h\in X$，记 $\phi(\alpha)=f(x_0+\alpha h)$. 因 $\phi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 取极值，故由一元函数极值的必要条件知，$\forall\ h\in X$.

$$\phi'(0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha}=\delta f(x_0;h)=0 \qquad \square$$

例 5-26 设函数 $F(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，记 $C^2([a,b])$ 为闭区间($[a,b]$)上具有二阶连续导数的函数全体。记 $D([a,b])=\{y\in C^2([a,b])\mid y(a)=y_0,y(b)=y_1\}$，$h\in C^2([a,b])$，使得 $y+\theta\in D([a,b])$，$h(a)=h(b)=0$. 定义泛函

$$J[y(x)]=\int_{a}^{b}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

求 $J[y]$ 在 $y(x)$ 达到极值的必要条件。

解 由定理 5.61，对 $y\in D([a,b])$，记

$$\phi(a)=J[y+\alpha h]$$

$$\phi'(0)=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[\eta+\alpha h]|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{J(y+\alpha h)-J(y)}{\alpha}$$

而

$$J[y+\alpha h]=\int_a^b F(x,y+\alpha h,y'+\alpha h')\mathrm{d}x$$

$$J[y+\alpha h]-J[y]=\int_a^b F(x,y+\alpha h,y'+\alpha h')-F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

因 $y,h\in C^2([a,b])$，故由一致收敛性(见第四章)和复合函数微分法知，

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha)&=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y+\alpha h]|_{\alpha=0}\\&=\lim_{\alpha\to 0}\int_a^b\frac{1}{\alpha}\{F(x,y+\alpha h,y'+\alpha h')-F(x,y,y')\}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\{F(x,y+\alpha h,y'+\alpha h')-F(x,y,y')\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_a^b (F_y \cdot h + F_{y'} \cdot h')\mathrm{d}x$$

由定理 5.61 知，若 $J[y]$在 y_0 达到极值，则必 $\phi'(0)=0$，从而

$$\int_a^b (F_y \cdot h + F_{y'} \cdot h')\mathrm{d}x = 0$$

由分部积分法

$$\int_a^b F_{y'}h'\mathrm{d}x = \int_a^b F_{y'}\mathrm{d}h$$

$$= hF_{y'}\big|_a^b - \int_a^b h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\mathrm{d}x - \int_a^b h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x$$

所以

$$\phi'(0) = \int_a^b (F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})h\mathrm{d}x = 0 \qquad (5-47)$$

从而(*)可知

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \qquad (5-48)$$

或

$$F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y'' - F_y = 0 \qquad (5-49)$$

(*)：由(5－47)式得出方程(5－48)的证明如下：

如果方程(5－48)在 $\xi\in[a,b]$处不成立，不妨设 $\Phi(\xi)=(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})(\xi)>0$，由 $\Phi(x)$的连续性，存在区间$[x_0,x_1]\subseteq[a,b]$，使得 $\xi\in[x_0,x_1]$且 $\Phi(x)>0, x\in[x_0,x_1]$. 令

$$h(x) = \begin{cases} 0, & a\leqslant x\leqslant x_0 \text{ 或 } x_1\leqslant x\leqslant b \\ (x-x_0)^2(x-x_1)^2, & x_0<x<x_1; \end{cases}$$

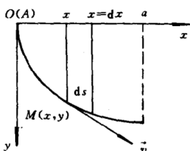
则 $h(a)=h(b)=0$，$h'(x)$在$[a,b]$上连续，因此 h 满足条件，但

$$\int_a^b \Phi(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \Phi(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2)\mathrm{d}x > 0$$

与(5－47)式矛盾，故方程(5－48)成立。

利用例 5-26 可得出本章开始提出的最速下降曲线的解答。正式地叙述如下：

例 5-27 在同一铅直平面内的所有连续不在同一铅直线上的两点 A,B 的曲线中,求一条曲线 Γ,使初速度为零的质点仅在重力作用下,自较高点 A 沿 Γ 滑到 B 所需时间最短。



解 选择坐标系如右图。设 Γ 的方程为 $y=y(x),0\leqslant x\leqslant a$. 质点在 $M(x,y)$ 处的速度为 $\vec{v}$,质点的质量为 m,由能量守恒定律知 $\frac{1}{2}mv^2=mgy$,即

$$v=\sqrt{2gy}.$$

由弧微分公式知 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$,所以,由 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\sqrt{2gy}$ 得

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

从 A 到 B 所需时间为

$$T[y]=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_0^a\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

令 $F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$,由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'})&=F_x+y'F_y+y''F_{y'}\\&\quad-\{y''F_{y'}+y'(F_{y'x}+y'F_{y'y}+y''F_{y'y'})\}\\&=F_x-y'(y''F_{y'y'}+y'F_{y'y}+F_{y'x}-F_y)\end{aligned}$$

所以,方程(5—48)等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_y-y'F_{y'})-F_x=0\qquad(5-50)$$

因 $F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$ 不显含 x,故 $F_x=0$,于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'F_y) = 0$$

从而

$$F - y'F_y = C_1 \quad (C_1\text{ 为常数})$$

而 $F_y = \frac{1}{\sqrt{2gy}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y'$，因此

$$y(1 + y'^2) = C_1$$

令 $y' = \cot\frac{t}{2}$，则

$$y = C_1/(1 + y'^2) = C_1\sin^2\frac{t}{2} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{\frac{C_1}{2}\sin t\mathrm{d}t}{\cot\frac{t}{2}} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t)\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{C_1}{2}(t - \sin t) + C_2$$

当 $t=0$ 时，$x=0$ 得 $C_2=0$，由 $y(a)=b$ 得 $C_1=b\csc^2\frac{a}{2}$. 因此，所求最速下降线的方程为

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

这是过 A,B 两点的摆线。 □

习题五

1. 下述 $\mathbf{R}^3$ 中子集，哪些是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间？其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$：

(1) $\xi_1=\xi_2$ 和 $\xi_3=0$ 的一切 x；

(2) $\xi_1=\xi_2+1$ 的一切 x；

(3) ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是正数的一切 x；

(4) $\xi_1-\xi_2+\xi_3=k$（k 为常数）的一切 x.

2. 证明 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是空间 $C([a,b])$ 中的线性无关组，其中 $x_i(t)=t^i,t\in[a,b],i=1,2,\cdots,n$.

3. 设 X 为一切有序实数对 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 所成的线性空间，证明以下都定义了 X 上的范数：

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|;$$

$$\|x\|_2=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|x\|_\infty=\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}$$

4. 设 X 是由数的有序 n 元组 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 所成线性空间，证明

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|;$$

$$\|x\|_p=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}(1<p<\infty)$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$$

都定义了 X 上的范数。

5. 证明：在赋范空间 X 中，$f(x,y)=x+y,g(\alpha,x)=\alpha x$ 是连续的。

6. 证明：赋范线性空间的子空间的闭包仍是线性空间。

7. 设 $(X_1,\|\cdot\|_1)$ 与 $(X_2,\|\cdot\|_2)$ 均为赋范空间，证明其乘积空间 $X=X_1\times X_2$ 是赋范空间，这里范数定义为

$$\|x\|=\max(\|x\|_1,\|x\|_2)$$

$X_1\times X_2$ 上的代数运算定义为

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$$

$x_1\in X_1,x_2\in X_2,\alpha$ 为数。

8. 证明:第4题中范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$满足

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

9. 设m,n是固定的正整数,X是由一切$m\times n$矩阵$A=(a_{jk})_{m\times n}$按矩阵的加法$A+B=(a_{jk}+b_{jk})_{m\times n}$与数乘矩阵$\alpha A=(\alpha a_{jk})_{m\times n}$所构成的线性空间,证明$X$上的一切范数等价。并问,类似于第4题中的范数$\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|_\infty$应是什么?

10. 设X,Y为赋范线性空间,证明线性算子$T:X\to Y$是有界的,当且仅当存在常数C,使得对一切$x\in \mathrm{dom}(T)$,有

$$\|Tx\| \leqslant C\|x\|$$

11. 证明:由$y=(\eta_j)=Tx$,$x=(\xi_j)$,$\eta_j=\xi_j/j$,$j=1,2,\cdots$给出的算子$T:l^\infty\to l^\infty$是有界线性算子。

12. 设T是把赋范线性空间X映成赋范线性空间Y的有界线性算子。如果存在正数b,使得

$$\|Tx\| \geqslant b\|x\|,\text{对一切 } x\in X$$

证明T^{-1}存在且有界。

13. 设X是$\mathbf{R}$上一切有界实值函数所成的赋范线性空间,其范数是

$$\|x\| = \sup_{t\in R}|x(t)|$$

又设$T:X\to Y$定义为

$$y(t) = Tx(t) = x(t-\Delta)\ (\Delta > 0 \text{ 是常数})$$

问T是否为线性算子?是否有界?

注:这是一个延迟线路模型,它是一个电子器件,其输出y是输入x的延迟形式,其延迟的时间为Δ.

14. 证明:在$C([a,b])$上,由

$$f_1(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)\mathrm{d}t\ (y_0\in C[a,b])$$

$$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b)\ (\alpha,\beta \text{ 固定})$$

定义的泛函是线性有界的。

15. 求出在 $C([a,b])$ 上由

$$f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\mathrm{d}t$$

定义的线性泛函 f 的范数。

16. 设 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\to(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)$，求 T 的矩阵表示与 T 零空间 $N(T)$.

17. 求 $\mathbf{R}_3$ 上的一线性泛函 f 的零空间的一个基，这里 f 由 $f(x)=\xi_1\xi_2-\xi_3,x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

18. 设 f 是定义在 Euclidean 平面 $\mathbf{R}^2$ 上的泛函，$f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,x=(\xi_1,\xi_2)\to\mathbf{R}^2,(\alpha_1,\alpha_2\to\mathbf{R})$，求 f 在 $\mathbf{R}^3$ 上的线性延拓 $\tilde{f}$ 和相应的范数。

19. 如果对赋范线性空间 X 上的每一个有界线性泛函 f，有 $f(x)=f(y)$，试证 $x=y$.

20. 如果 x_0 是赋范线性空间中这样的点，使得 $|f(x_0)|\leqslant C$ 对一切范数为 1 的 $f\in X^*$ 成立，试证明 $\|x_0\|\leqslant C$.

21. 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T_n\in B(X\to Y),n=1,2,\cdots$，证明以下命题等价：

(a) $\{\|T_n\|\}$ 是有界的；

(b) $\{\|T_nx\|\}$ 对一切 $x\in X$ 有界；

(c) $\{|g(T_nx)|\}$ 是有界的，对一切 $x\in X$ 和 $g\in Y^*$.

22. 为了说明函数 x 的 Fourier 级数可以在 x 的间断点处收费，求函数

$$x(t)\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t<0\\ 1, & 0\leqslant t<\pi\end{cases}\text{且 } x(t+2\pi)=x(t)$$

的 Fourier 级数，证明：在 $t=\pm n\pi$ 处，级数之值为 $\frac{1}{2}$，即 x 的左、右极限的算术平均值。

23. 设$1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\{x_n\}\subseteq l^p$,则$\sum\limits_{j=1}^{n}x_n(j)y(j)\to 0(\forall\ y=\{y_1,y_2,\cdots\}\in l^q)$当且仅当$\max\limits_n\|x_n\|<\infty$且对每个$j\geqslant 1,x_n(j)\to 0(n\to\infty)$.

24. 设(X,Ω,μ)是测度空间,$1<p<\infty,\{f_n\}\subseteq L^p(X,\Omega,\mu)$,则$\forall\ g\in L^q(\mu)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),\int_X f_n g\mathrm{d}\mu\to 0(n\to\infty)$的充分必要条件是$\sup\limits_n\|f_n\|_p<\infty$且$\forall\ E\subseteq\Omega,\mu(E)<\infty$有

$$\int_E f_n\mathrm{d}\mu\to 0(n\to\infty)$$

25. 设(S,d)是度量空间,X是赋范线性空间,称$f:S\to X$为Lipschitz函数,如果存在常数$M>0$. 使得$\|f(x)-f(t)\|\leqslant M\mathrm{d}(x,t)(\forall\ x,t\in S)$. 证明:如果$f:S\to X$是使得对所有$L\in X^*$,$L\circ f:S\to\mathbf{R}$是Lipschitz函数,则$f:S\to X$也是Lipschitz函数。

26. 设X是Banach空间,$\{x_n\}\subseteq X$是线性无关的,且使得$\forall\ x\in X$,存在$\{\alpha_n\}\subseteq\mathbf{R}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|=0$. 这样的一个序列$\{x_n\}$称为$X$为一组基。证明:

(1) X是可分的,即存在可数稠密集;

(2) 令Y是$\mathbf{R}$中使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$在$X$中收敛的序列$\{\alpha_n\}$全体,$\forall\ y\in Y$,定义$\|y\|=\sup\limits_n\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|$,则$(Y,\|\cdot\|)$是Banach空间;

(3) 证明存在一个有界的双映射:$T:X\to Y$;

(4) 设$f_n:X\to\mathbf{R},f_n(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k)=\alpha_n,n\geqslant 1$,则$f_n\in X^*$;

(5) x_n不属于由$\{x_k,k\neq n\}$所张成的线性子空间的闭包。

27. 设X和Y是Banach空间,$A\in B(X\to Y)$,证明存在常数

$C>0$，使得 $\|Ax\| \geqslant C\|x\|$ ($\forall x \in X$) 当且仅当 Kernel $A = \{\theta\}$，且 A 的值域为闭集，其中 Kernel $A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$.

28. 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，则 graph$T$ 是闭的，当且仅当 $x_n \to 0, Tx_n \to y \Rightarrow y = 0$.

29. 空间 $(C([a,b]), \|\cdot\|)$ 不是内积空间，其中范数为 $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$.

30. 设 H 是内积空间，$\|x\|$ 是由内积所导出的范数，则当 H 是实数域上的内积空间时，有

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \qquad (1)$$

当 H 是复数域上内积空间时，有

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \qquad (2)$$

试证明之。(1)和(2)两式称为极化恒等式。

31*. 设 X 为赋范线性空间，其中范数为 $\|\cdot\|$，若 $\forall x,y \in X$，有 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\| + \|y\|)$. 证明：可在 X 上定义内积 (x,y)，使得 $\forall x \in X$，$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.（提示：利用极化恒等式）

32. 如果在内积空间中，对一切 x，有 $(x,u) = (x,v)$，证明 $u = v$.

33. 证明：在内积空间中，$x \perp y$ 当且仅当 $\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|$ 对一切标量 α 成立。

34. 设 H 是 Hilbert 空间，$f,g \in H$，$\|f\| = \|g\| = 1$，证明 $\forall t \in (0,1)$，有 $\|tf + (1-t)g\| < 1$. 该不等式对 $\{h \in H \mid \|h\| \leqslant 1\}$ 成立吗？

35. 设 $M \subseteq H$，$P = P_M$（对 M 的投影算子），证明 $I - P$ 是 H 在 $M^\perp$ 上的正交投影。

36. 设$M\subseteq H$，证明$M\cap M^{\perp}=\{0\}$，且$\forall\ h\in H, h=f+g, f\in M, g\in M^{\perp}$.

37. 设$H=l^2(\mathrm{N}\cup 0)$，即$\forall\ x\in l^2(\mathrm{N}\cup 0), x=(x_0,x_1,x_2,\cdots), x_j\in\mathbf{R}, j=0,1,2,\cdots$，且$\sum\limits_{i=0}^{\infty}|x_i|^2<\infty$.

(1) 证明，如果$\{\alpha_n\}\subseteq l^2$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n Z^n$的收敛半径$\geqslant 1$.

(2) 如果$|\lambda|<1, L: H\to C$(C为复数域)，$L(\{\alpha_n\})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$，找出$h_0\in H$，使得$L(h)=(h,h_0),\forall\ h\in H$.

(3) 求在(2)中定义的线性泛函L的范数$\|L\|$.

38*. 设$H=L^2([0,1]), C^{(1)}$是$[0,1]$上有连续导函数的函数全体，设$t\in[0,1]$. 定义$L: C^{(1)}\to\mathbf{R}, L(h)(t)=h'(t)$，证明：不存在$H$上的有界线性泛函，在$C^{(1)}$上同$L$一致。

39. 在XOY平面内求一条边界固定的曲线，使其绕横轴旋转产生的空间曲面面积最小。

40. 求泛函$J[y(x)]=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x$满足边界条件$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$的极值曲线。

41. 按Fermat原理，光线在一种介质中自一点$A_1(x_1,y_1)$传播到另一点$A_2(x_2,y_2)$的道路$y=y(x)$使传播时间

$$T[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}s}{v}$$

取极小值，其中s是弧长，$v(x,y)$是光在这种介质中的传播速度。证明：光的传播道路满足方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(1+y'^2)^2\frac{\partial v}{\partial y}-y'(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

第六章　FOURIER 积分与广义函数

正像对数运算将实数的乘法和除法运算转换为实数的加法和减法运算一样，积分变换可将函数的微分与积分运算转换为函数的乘积运算。这样使得许多问题的分析与求解得到简化。Fourier 变换是两种常用的积分变换之一，在信号分析、数据处理等领域中得到广泛应用。近年发展起来的小波变换，以 Fourier 变换的思想为基础，已经在量子场论、地震勘探、信号处理、机械故障诊断与监控及数字电视等领域中得到了成功的应用。

§6.1　Fourier 变换及其基本性质

§6.1.1　周期函数的 Fourier 级数

设 $f(t)$ 是直线 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的函数。如果 $f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 Dirichlet 条件：

(1)　$f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，或者只有有限个第一类间断点；

(2)　$f(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点，

则 $f(t)$ 的 Fourier 级数在 $\mathbf{R}^1$ 上收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2},t\in\mathbf{R}^1 \tag{6-1}$$

其中 $a_k,k=0,1,2,\cdots,b_k,k=1,2,\cdots$ 称为 $f(t)$ 的 Fourier 系数，其

计算式为

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t, k = 0,1,2,\cdots \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t, k = 1,2,\cdots
\end{aligned}
\qquad (6-2)
$$

(6－1)式将一个以 2π 为周期的函数分解成一列谐波的叠加。根据(6－1)式和(6－2)式，数对序列$\{a_k,b_k\}$与 $f(t)$ 相互确定。这种关系为分析周期波提供了方便，便于在时—空域上对波形进行分析，而$\{a_k,b_k\}$便于在频率域上进行分析。当已知由 f 确定的数对列$\{a_k,b_k\}$时，不仅可以知道 $f(t)$ 是由哪些频率的谐波组成的，而且可由此知道这些谐波的振幅分布。而谐波振动的能量与振幅的平方成正比，因此，组成波的能量随频率的分布也随之确定。可见，函数的 Fourier 级数展开，为周期波的内部结构分析，提供了一个有效的方法。

首先注意到，对任意以 T 为周期的函数 $f(t)$，如果它在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件，则借助于变量替换 $t=\frac{T}{2\pi}u$，可知 $F(u)=f\left(\frac{T}{2\pi}u\right)$ 是以 2π 为周期的周期函数，从而可得

$$
\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k\sin\frac{2k\pi}{T}t) \qquad (6-3)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t\mathrm{d}t, k = 0,1,2,\cdots \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t\mathrm{d}t, k = 1,2,\cdots
\end{aligned}
\qquad (6-4)
$$

因此，对于任意一个满足 Dirichlet 条件的周期函数，都可利用 Fourier 系数$\{a_k,b_k\}$进行分析。其次，在(6－1)式中，利用 Euler 公

式

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

可得到 $f(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6-5}$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6-6}$$

注 1 由于 $c_k = |c_k| e^{i\phi_k}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，所以，称 $\{|c_k|\}$ 为 $f(t)$ 的**振幅谱**，而称 $\{\phi_k\}$ 为 $f(t)$ 的**相位谱**。

注 2 为了把 $f(t)$ 与其 Fourier 系数联系起来，常记 $\hat{f}(k) = c_k, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$。周期为 2π 的函数 $f(t)$ 的 Fourier 系数具有如下性质：

定理 6.1 设 $f,g \in L^1[-\pi,\pi]$，且是以 2π 为周期的函数，则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{\wedge}(k) = \alpha\hat{f}(k) + \beta\hat{g}(k)$，$\alpha,\beta$ 为复数；

(2) 记 $f_\tau(t) = f(t-\tau)$，则

$$\hat{f}_\tau(k) = \hat{f}(k) e^{-ik\tau};$$

(3) $|\hat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1}$，这里 $\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\mathrm{d}t$；

(4) 称

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x)\mathrm{d}x$$

为 f 与 g 的卷积，则 $(f*g)^{\wedge}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k), k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$。且 $\|f*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

(5) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$.

(6) 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数，具有连续的 m 阶导数，则

$$\lim_{|k|\to\infty} |k^m \hat{f}(k)| = 0$$

及$\lim\limits_{k\to\infty}k^m a^k=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}k^m b_k=0$，这里 a_k,b_k 由(6—2)式定义。

证明 (1)可直接验证。往证(2)。

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_\tau(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(u)e^{-ik(u+\tau)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-ik\tau}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}\mathrm{d}u = e^{-ik\tau}\hat{f}(k)
\end{aligned}
$$

(3)由 $|\hat{f}(k)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\mathrm{d}t = \|f\|_{L_1}$ 知。

(4)利用交换积分次序，得

$$
\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x)\mathrm{d}x\right\}e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x)e^{-ikx}e^{-ik(t-x)}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)e^{-ik(t-x)}\mathrm{d}t\right\}g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(k)\hat{g}(k)
\end{aligned}
$$

至于不等式$\|f*g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$的证明是平凡的。

(5)当$f\in L^2[-\pi,\pi]$时，由定理 5.41 中的 Bessel 不等式，有

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|(f,e^{-ikt})|^2 \leqslant \|f\|^2
$$

从而，由级数收敛的必要条件知$|\hat{f}(k)|^2\to 0(|k|\to\infty)$，于是$|\hat{f}(k)|\to 0,(|k|\to\infty)$。

对 $f\in L^1[-\pi,\pi]$，由逼近定理(见[12])，对于任意 $\varepsilon>0$，存在$g_\varepsilon\in L^2[-\pi,\pi]$，使得$\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$，而对于 g_ε，有

$$
\hat{g}_\varepsilon(k)\to 0(|k|\to\infty)
$$

于是,存在 $k_0\in N$ 使得 $|\hat{g}_\varepsilon(k)|<\varepsilon,(k>k_0)$,从而当 $k>k_0$ 时,有

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(k)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g_\varepsilon(t)|\cdot|e^{-ikt}|\mathrm{d}t \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\varepsilon(t)|\cdot|e^{-ikt}|\mathrm{d}t \\
&=\|f-g\|_{L^1}+|\hat{g}_\varepsilon(k)|<2\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{|k|\to\infty}\hat{f}(k)=0$.

(6)用分部积分法,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{-ikt}}{-ik}\bigg|_{\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{2\pi(ik)^m}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

注意到 $f^{(m)}\in L^1[-\pi,\pi]$,由(5)有 $\hat{f}^{(m)}(k)\to 0(|k|\to\infty)$,所以

$$
\begin{aligned}
|k^m\hat{f}(k)| &= \left|\frac{k^m}{2\pi(ik)^m}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t\right| \\
&= |\hat{f}^{(m)}(k)|\to 0(|k|\to\infty)
\end{aligned}
$$

同理可证 $\lim\limits_{k\to\infty}k^m a_k=0$ 与 $\lim\limits_{k\to\infty}k^m b_k=0$. □

从定理 6.1(4)可知,两个函数的卷积的 Fourier 系数的计算可转化为这两个函数的 Fourier 系数的乘积运算,这个性质给频谱分析带来极大的方便。因为信号分析中,相关分析是一个重要概念,而两个以 2π 为周期的信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的互相关函数定义为

$$
R_{12}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\tau)f_2(t+\tau)\mathrm{d}\tau
$$

$R_{12}(t)$ 的 Fourier 系数

$$\hat{R}_{12}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\tau)f_2(t+\tau)\mathrm{d}\tau\right\}e^{-ikt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\tau)\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f_2(t+\tau)e^{-ik(t+\tau)}\mathrm{d}t\right\}e^{ikt}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\tau)\hat{f}_2(k)e^{-i(-k)\tau}\mathrm{d}\tau=2\pi\hat{f}_1(-k)\hat{f}_2(k)$$

在频谱分析中，对相关函数的谱分析，使得本来要作的积分运算(相关函数的计算)，转换成只需作乘积运算，这样，便大大减少了运算量。这也是 Fourier 分析具有生命力的关键所在。

§6.1.2 非周期函数的 Fourier 变换

一般的信号 $f(t)$，是直线上的非周期函数。直观上，我们可认为是周期 $T\to\infty$ 的情形。对以 T 为周期的函数 $f(t)$，由(6—3)与(6—4)两式，记

$$c_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\mathrm{d}t,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \quad (6-7)$$

则当 $f(t)$在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上满足 Dirichlet 条件且连续时，有

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \quad (6-8)$$

设 $f\in L^1(-\infty,\infty)$，在(6—8)式中，令 $T\to\infty$，可证其“极限形式”为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-iw\tau}\mathrm{d}\tau e^{iwt}\mathrm{d}w \quad (6-9)$$

令

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-iw\tau}\mathrm{d}\tau \quad (6-10)$$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-iwt}\mathrm{d}w \quad (6-11)$$

定义 6.1　设复值函数 $f\in L^1(-\infty,\infty)$，称(6－10)式定义的 $\hat{f}(w)$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，称(6－11)式定义的 $g(t)$ 为 $\hat{f}(w)$ 的 Fourier 逆变换，记为 $(\hat{f}(w))^{-1}$。而分别称

$$\hat{f}_c(w)=\sqrt{2\pi}\int_0^{\infty}f(\tau)\cos\tau w\mathrm{d}\tau \qquad (6-12)$$

与

$$\hat{f}_s(w)=\sqrt{2\pi}\int_0^{\infty}f(\tau)\sin\tau w\mathrm{d}\tau \qquad (6-13)$$

为 Fourier 余弦变换与 Fourier 正弦变换。

注　当 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上偶函数时，$\hat{f}=\hat{f}_c(w)$；当 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上奇函数时，$\hat{f}=i\hat{f}_s(w)$。

类似于周期函数的 Fourier 系数，对于 $\hat{f}(w)$，有

定理 6.2　设 $f\in L^1(-\infty,+\infty)$，$g\in L^1(-\infty,+\infty)$，

(1)　$\lim\limits_{|w|\to\infty}\hat{f}(w)=0$；

(2)　$|\hat{f}(w)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1}$；

(3)　记 $u(t)=f(t+\tau)$，$h(t)=e^{-ibt}f(t)$，则 $\hat{u}(w)=e^{-i\tau w}\hat{f}(w)$，$\hat{h}(w)=\hat{f}(w+b)$；

(4)　$(\alpha f+\beta g)^{\wedge}(w)=\alpha\hat{f}(w)+\beta\hat{g}(w)$；

(5)　$\hat{f}(w)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是一致连续的；

(6)　设 $f_n\in L^1(-\infty,\infty)$，$n=1,2,\cdots$ 且存在 $f\in L^1(-\infty,\infty)$，使得

$$\|f_n-f\|_{L^1}=\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t\to 0(n\to\infty)$$

则对 $w\in(-\infty,\infty)$，一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(w)=\hat{f}(w).$$

证明　(1)，(2)，(3)，(4)的证明是容易的。我们只证(5)和(6)。

(5)对于 $h\in\mathbf{R}$，

$$|\hat{f}(w+h)-\hat{f}(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{iht}-1|\cdot|f(\tau)|\mathrm{d}\tau \tag{6-14}$$

因 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)|\mathrm{d}\tau<\infty, |e^{iht}-1|\leqslant 2$，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{ih\tau}-1|\cdot|f(\tau)|\mathrm{d}\tau<\infty$$

又令 $g_\tau(h)=|e^{ih\tau}-1|f(\tau)$，则对几乎所有的 $\tau\in(-\infty,\infty)$，有 $\lim\limits_{h\to\infty} g_\tau(h)=0$。由控制收敛定理，有

$$\lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{iht}-1|\cdot|f(\tau)|\mathrm{d}\tau=0$$

又注意到(6－14)右端与 w 无关，从而可知 $\hat{f}(w)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续。

(6)因为 $\|f_n-f\|_{L^1}\to 0(n\to\infty)$ 及

$$|\hat{f}_n(w)-\hat{f}(w)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f_n(\tau)-f(\tau))e^{iw\tau}\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(\tau)-f(\tau)|\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_n-f\|_{L^1}$$

所以，对 $w\in(-\infty,\infty)$，一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(w)=\hat{f}(w)$. □

6.1.3 Fourier 变换的性质

定理 6.3 设 $f\in L^1(-\infty,\infty)$

(1) (相似性质)设 a 是不为零的实常数，则 $f(at)$ 的 Fourier 变换为 $\frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{w}{a})$；

(2) (时移性质)对 $t_0\in R$，有 $f(t-t_0)$ 的 Fourier 变换为 $e^{-it_0w}\hat{f}(w)$；

(3) (频移性质)设 w_0 为常数，则 $e^{iw_0t}f(t)$ 的 Fourier 变换为

$\hat{f}(w-w_0)$；

(4) 设 $f'(t)$ 的 Fourier 变换存在，且 $f(t)\to 0(|t|\to\infty)$，则有

$$\hat{f'}(w)=iw\hat{f}(w);$$

(5) 设 $tf(t)\in L^1(-\infty,\infty)$，则 $-itf(t)$ 的 Fourier 变换为 $(\hat{f}(w))'$；

(6) 设 $f\in L^1(-\infty,\infty)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\mathrm{d}\tau=0$，则 $h(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的 Fourier 变换为 $\frac{\hat{f}(w)}{iw}$。

证明 (1)，(2)与(3)可直接验证。利用分部积分法，并且注意到 $\lim\limits_{|t|\to\infty}f(t)=0$ 可得证(4)如下：

$$\begin{aligned}\hat{f'}(w)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)e^{-iwt}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{iw}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t\\&=iw\hat{f}(w)\end{aligned}$$

(5)由积分号下求微分，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}-itf(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}(\hat{f}(w))'$$

因此，$-itf(t)$ 的 Fourier 变换为 $(\hat{f}(w))'$，得证。

至于(6)，因 $f\in L^1(-\infty,+\infty)$，故 $h\in L^1(-\infty,+\infty)$，故 $f(t)=h'(t)$。记 $h(t)$ 的 Fourier 变换为 $H(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t$，由(6)知 $h'(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{h'}(w)=iwH(w)$，而 $\hat{h'}(w)=\hat{f}(w)$，故 $H(w)=\frac{\hat{f}(w)}{iw}$. □

定理 6.4(**Parseval 公式**) 设 $f\in L^2(\mathbf{R})g\in L^2(\mathbf{R})$，$\hat{f}(w)$，$\hat{g}(w)$ 分别为 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的 Fourier 变换，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{g(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\,\overline{\hat{g}(w)}\mathrm{d}w\qquad(6-15)$$

特别有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(w)|^2\mathrm{d}w \qquad (6-16)$$

证明 由 $f\in L^2(\mathbf{R})$，$g\in L^2(\mathbf{R})$及不等式

$$2\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

知 $fg\in L^1(-\infty,+\infty)$. 由重构公式(6－9)有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}\mathrm{d}w\bar{g}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{iwt}\mathrm{d}t\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\,\overline{\hat{g}(w)}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

(6－15)式得证。令 $g(t)=f(t)$得(6－16)式。 □

定理 6.5(乘积定理) 如果 $g(t)\in L^1(\mathbf{R})$，f 的 Fourier 变换 $\hat{f}(w)\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$(fg)^\wedge(w)=\hat{f}(w)*\hat{g}(w)$$

证明 令 $h(t)=f(t)g(t)$，$t\in\mathbf{R}$。可证 $h(t)\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\hat{h}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t$$

由重构公式

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)e^{itu}\mathrm{d}u$$

于是

$$\begin{aligned}\hat{h}(w)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(u)e^{itu}\mathrm{d}u\right\}g(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{it(u-w)}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\hat{g}(w-u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= \hat{f}(w) * \hat{g}(w) \qquad \square$$

关于卷积的 Fourier 变换，类似于周期函数的卷积的 Fourier 系数。

定理 6.6（**卷积定理**） 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$，$g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{g}(w)$ 存在，且 $\hat{g} \in L^1(\mathbf{R})$ 则 $(f * g)^\wedge(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w)$.

证明 由定理条件易知 $h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-x)\mathrm{d}x$ 存在。由定理 6.3(2) 知 $g(t-x)$ 的 Fourier 变换为 $e^{-iwx}\hat{g}(w)$，从而，由重构公式有

$$g(t-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w)e^{-iwx}e^{iwt}\mathrm{d}w$$

因此

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(w)e^{-iw(x-t)}\mathrm{d}w\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}\mathrm{d}x\right\}\hat{g}(w)e^{iwt}\mathrm{d}w$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{-iwt}\mathrm{d}w$$

由重构公式得

$$\hat{h}(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w) \qquad \square$$

例 6-1 设 $f(t) = e^{-t^2/a^2}$，$g(t) = e^{-t^2/b^2}$，$t \in \mathbf{R}$，其中 a, b 为正常数，计算 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\mathrm{d}x$$

解 由于

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/a^2}e^{-iwt}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+iwa^2t)/a^2}\mathrm{d}t$$

$$= e^{-\frac{(wa)^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+iwa^2 t/2)^2/a^2}\mathrm{d}t$$

令 $s=(t+iwa^2/2)/a$，则

$$\hat{f}(w) = ae^{-w^2a^2/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 ds} = \sqrt{\pi a^2}e^{-\frac{-w^2a^2}{4}}$$

同理可得 $\hat{g}(w)=\sqrt{\pi b^2}e^{-w^2b^2/4}$。由卷积定理 6.6 知

$$\hat{h}(w) = \pi abe^{-\frac{a^2+b^2}{4}w^2}$$

根据重构公式可得

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi abe^{-\frac{a^2+b^2}{4}w^2}e^{iwt}\mathrm{d}w = \frac{ab}{a^2+b^2}e^{-\frac{t^2}{a^2+b^2}}. \qquad \square$$

从例 6-1 可看出，通过计算 $\hat{f}(w)$，$\hat{g}(w)$和 $\hat{h}(w)=\hat{f}(w)\hat{g}(w)$ 的 Fourier 反变换，而避免了积分式 $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t-x)\mathrm{d}x$ 的直接计算。而对于 $\hat{f}(w)$，$\hat{g}(w)$和 $\hat{h}(w)$的 Fourier 的变换，通过采样定理进行离散化后，有快速算法。因此，利用卷积定理与离散化后的快速 Fourier 变换算法，可很快地计算两个函数的卷积。关于快速 Fourier 变换算法，限于篇幅，本书不再详细介绍，有兴趣的读者可参阅参考文献[14]。

在时间序列分析中，常常要计算两个函数 $f(t)$，$g(t)$，$t\in\mathbf{R}$ 的互相关函数

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(t+x)\mathrm{d}x \qquad (6-17)$$

及 f 的自相关函数

$$AR(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{f}(t+x)\mathrm{d}x \qquad (6-18)$$

其中 $\bar{f}$，$\bar{g}$分别表 f 和 g 的共轭函数。

类似于卷积定理，有

定理 6.7（互相关函数的 Fourier 变换） 设函数 $f\in L^1(\mathbf{R})$，$g\in L^1(\mathbf{R})$，且 f 与 g 的互相关函数 $R(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{g}(t+x)\mathrm{d}x$ 在

R 上绝对可积，则 $R(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{R}(w)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\overline{\hat{g}}(w)$。

证明　我们首先证明，当 $g\in L^1(\mathbf{R})$，有

$$\hat{\bar{g}}(w)=\overline{\hat{g}}(-w)$$

事实上，因为 $g\in L^1(\mathbf{R})$，则由 $|\bar{g}(t)|=|g(t)|$，故 $\bar{g}(t)\in L^1(\mathbf{R})$，从而对几乎所有的 $w\in\mathbf{R}$，$\hat{\bar{g}}(w)$ 存在，且

$$\begin{aligned}\hat{\bar{g}}(w)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{iwt}\mathrm{d}t}\\&=\overline{\hat{g}}(-w)\end{aligned}$$

注意到 $R(t)$ 具有对称性，即 $R(t)=R(-t)$，由上述结果及 Fubini 定理，有

$$\begin{aligned}\hat{R}(w)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}R(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}R(u)e^{iwu}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\bar{g}(x+u)\mathrm{d}x\right\}e^{iwu}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(x+u)e^{iw(x+u)}\mathrm{d}u\right\}e^{-iwx}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\hat{\bar{g}}(-w)e^{-iwx}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{\hat{g}}(w)e^{-iwx}\mathrm{d}x\\&=\sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\,\overline{\hat{g}}(w).\end{aligned}$$

□

由定理 6.7 可得 $f(t)$ 的相关函数 $AR(t)$ 的 Fourier 变换为

$$(AR)^{\wedge}(w)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\cdot\overline{\hat{f}}(w)=\sqrt{2\pi}|\hat{f}(w)|^2$$

在信号分析中，常把 $\sqrt{2\pi}\hat{f}(w)\overline{\hat{g}}(w)$ 称为能量信号 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的互能量谱密度，而称 $AR(w)$ 为能量信号 $f(t)$ 的能量谱密度，记为 $s(w)$。

例 6-2 求能量信号

$$f(t)=\begin{cases}e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

的自相关函数和能量谱密度,其中 $\beta>0$.

解 注意到

$$f(t+x)=\begin{cases}e^{-\beta(t+x)}, & x\geqslant -t\\ 0, & x<-t\end{cases}$$

当 $t\geqslant 0$ 时,

$$AR(t)=\int_0^{\infty}e^{-\beta(x+t)}e^{-\beta}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\beta}$$

当 $t<0$ 时,

$$AR(t)=\int_{-t}^{\infty}e^{-\beta(x+1)}e^{-\beta}\mathrm{d}x$$

$$=e^{-\beta t}\int_{-t}^{\infty}e^{-2\beta x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\beta}e^{\beta t}$$

因此 $f(t)$ 的自相关函数 $AR(t)=\frac{1}{2\beta}e^{-\beta|t|}, t\in\mathbf{R}$.

由于

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta t-iwt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+iw}$$

所以,根据定理 6.7 知 $f(t)$ 的能量谱密度

$$s(w)=(AR)^{\wedge}(w)=\sqrt{2\pi}\,|\hat{f}(w)|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\beta^2+w^2}.\quad\square$$

§6.2 广义函数及其Fourier变换

§6.2.1 Dirac(狄拉克)函数

我们从"冲激函数"开始,叙述广义函数的实际背景。从物理上来说,"冲激"被认为是非常短暂、非常强烈的单位面积的脉冲,即一个无穷大的量作用在一瞬间,而作用的总效果等于1,从数学上讲,"冲激"具有零宽度和无限的高度而具有"单位面积"。尽管这样一个真正的冲激函数在现实世界中根本不存在,但它却是研究物理学中诸如点电荷、质点、点源等许多现象的数学工具,也是考虑动力系统和光学系统的重要工具。"冲激函数"常称为δ函数或Dirac(狄拉克)函数。

δ函数可定义如下:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ +\infty, & t=0\end{cases} \tag{6-19}$$

但

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{6-20}$$

上述函数的定义不能给出函数$\delta(t)$的明显图像,而必须通过在$t=0$附近定义的函数

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0,\text{或}\ t>h,\\ \dfrac{1}{h}, & 0<t<h\end{cases} \tag{6-21}$$

来说明。易知,对于任意的$h>0$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)\mathrm{d}t=\int_0^h\frac{1}{h}\mathrm{d}t=1$$

δ函数是$\delta_h(t)$在$h\to 0^+$时的极限,即

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0^+} \delta_h(t) \qquad (6-22)$$

如果我们承认 δ 函数的积分可通过由 $\delta_h(t)\,(h>0)$ 的积分取极限并可“交换积分与取极限的次序”的话，则可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to\infty} \delta_h(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\mathrm{d}t = 1$$

则知 δ 函数满足(6−20)式。以下叙述 δ 函数的一些性质，这些性质的证明中均假设可交换积分与取极限的顺序。

性质 1 若 $f(t)$ 在 $t=0$ 及其附近连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\mathrm{d}t = f(0) \qquad (6-23)$$

证明 由积分中值定理，并根据 δ 函数的极限形式，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to\infty} \delta_h(t) f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{h\to\infty}\int_{0}^{h} \frac{1}{h} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} f(\xi)h = f(0)\end{aligned}$$

□

性质 2 若 $f(t)$ 在 $t=a$ 及其附近连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\mathrm{d}t = f(a) \qquad (6-24)$$

证明 令 $\tau=t-a$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(a+\tau)\mathrm{d}\tau = f(a)$$

□

注 若 $f(t)$ 在 $t=a$ 处的左、右极限均存在，但 $t=a$ 为 $f(t)$ 的第一类间断点，则可证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[f(a+0) + f(a-0)]$$

性质 3 记 $H(t)$ 为海微赛德单位函数，即

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

则 $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)$。

证明 由 $H(t)$ 的定义。当 $h>0$ 时，有

$$H(t+h)-H(t)=\begin{cases}0, & t<-h\text{ 或 }t>0\\ 1, & -h<t<0\end{cases}$$

从而

$$\frac{1}{h}\{H(t+h)-H(t)\}=\delta_h(t+h)$$

令 $h\to 0$，有

$$\begin{aligned}\delta(t)&=\lim_{h\to\infty}\delta_h(t+h)\\ &=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\{H(t+h)-H(t)\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)\end{aligned}$$

□

§6.2.2 δ 函数的 Fourier 变换

定义 6.2 设 $f(t)$，$\hat{f}(w)$ 分别是定义在实数域 **R** 上允许含有 $\delta(t-a)$ 及其导数的函数，如果有

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t \tag{6-25}$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-iwt}\mathrm{d}t \tag{6-26}$$

则称 $f(t)$ 与 $\hat{f}(w)$ 为 Fourier 变换对。

例 6-3 $\hat{\delta}(w)=1$

证明 由前一段中性质 1 知

$$\hat{\delta}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t=1$$

且$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(w)e^{iwt}\mathrm{d}t=\delta(t)$。[①] □

由例 6-3，易知$\delta(t-a)$的 Fourier 变换

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)e^{-iwt}\mathrm{d}t=e^{-iaw}$$

例 6-4 求$F(w)=\frac{1}{iw}+\pi\delta(w)$的 Fourier 逆变换。

解 $F(w)$的 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{iw}+\pi\delta(w)\right]e^{iwt}\mathrm{d}w\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(w)e^{iwt}\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{iw}e^{iwt}\mathrm{d}w\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wt}{w}\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wt}{w}\mathrm{d}w\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin wt}{w}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

注意到 Dirichlet 积分

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin wt}{w}\mathrm{d}w=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & t<0\end{cases}$$

则有

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}, & t>0,\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & t=0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$ □

---

① $\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwt}\mathrm{d}w=\delta(t)$ 的证明要用到δ函数是δ式函数列的弱 * 极限理论才能证明，这部分内容可参阅[14]。

参考文献

[1] 熊全淹. 近世代数. 上海科学技术出版社,1978
[2] 夏道行等. 实变函数论与泛函分析. 人民教育出版社,1979
[3] 柳重堪. 应用泛函分析. 国防工业出版社,1986
[4] Arch W. Naylor, George R. Sell. Linear Operator Theory in Engineering and Science. Springer-Verlang,1982
[5] 严加安. 测度与积分. 陕西师范大学出版社,1988
[6] 数学分析. 复旦大学数学系. 上海科学技术出版社,1962
[7] 汪浩,孙兴,刘森石. 高等数学. 国防科技大学出版社,1988
[8] E. Kreyszig. 泛函分析引论及应用(中译本). 重庆出版社,1986
[9] A. E. Taylor. 泛函分析引论(中译本). 陕西人民教育出版社,1986
[10] 张鸣歧. 应用泛函分析引论. 北京理工大学出版社,1989
[11] 苏家铎,潘杰,方毅,狄成恩. 泛函分析与变分法. 中国科学技术大学出版社,1993
[12] Weaver HJ. 离散和连续傅里叶分析理论(中译本). 王中德,张辉译. 北京邮电学院出版社,1991
[13] 河田龙夫. Fourier 分析(中译本). 周民强译. 高等教育出版社,1982
[14] 熊大国. 积分变换. 北京理工大学出版社,1990
[15] 路季平. 积分变换及其在物理海洋学中的应用. 海洋出版社,1984